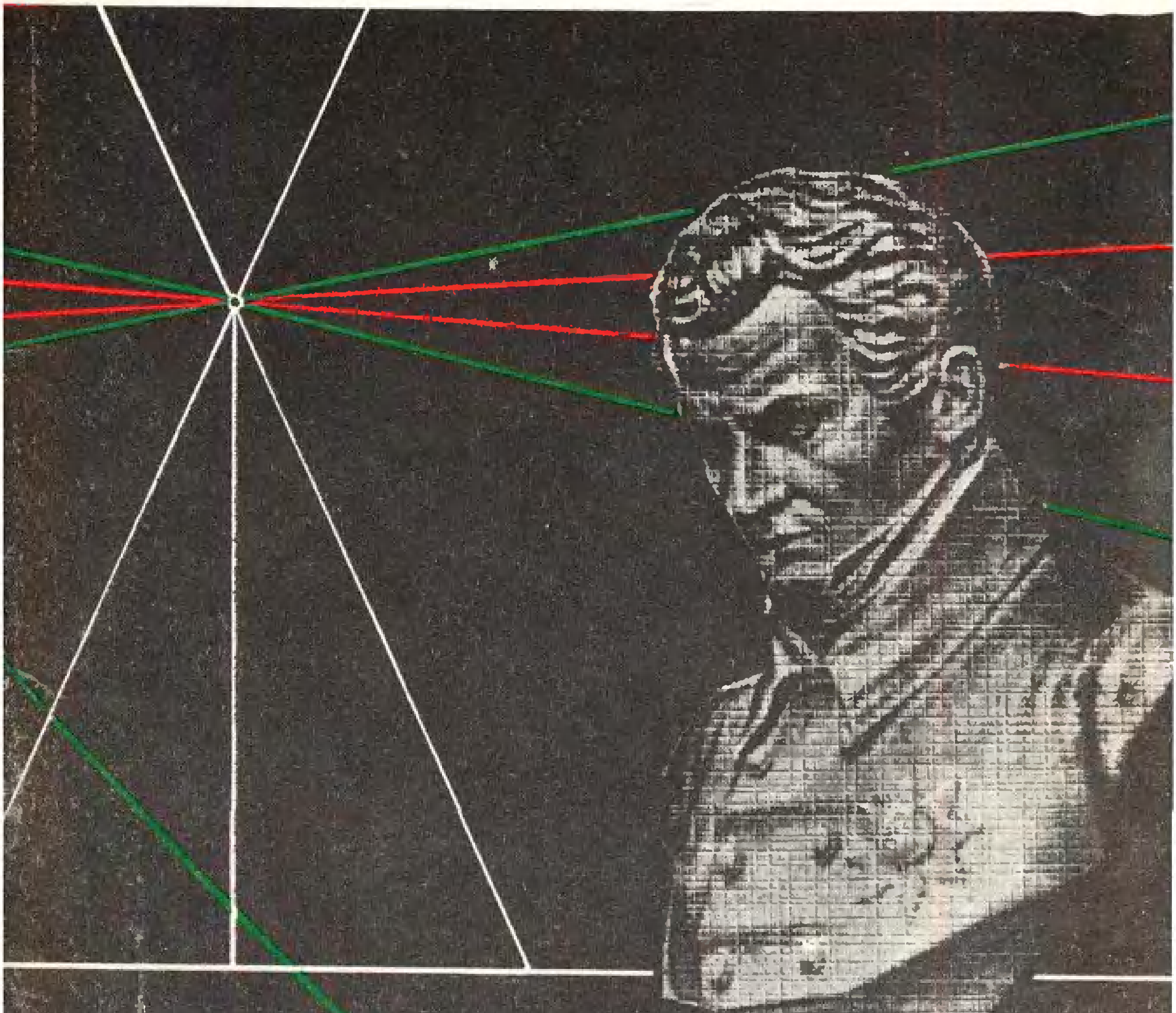
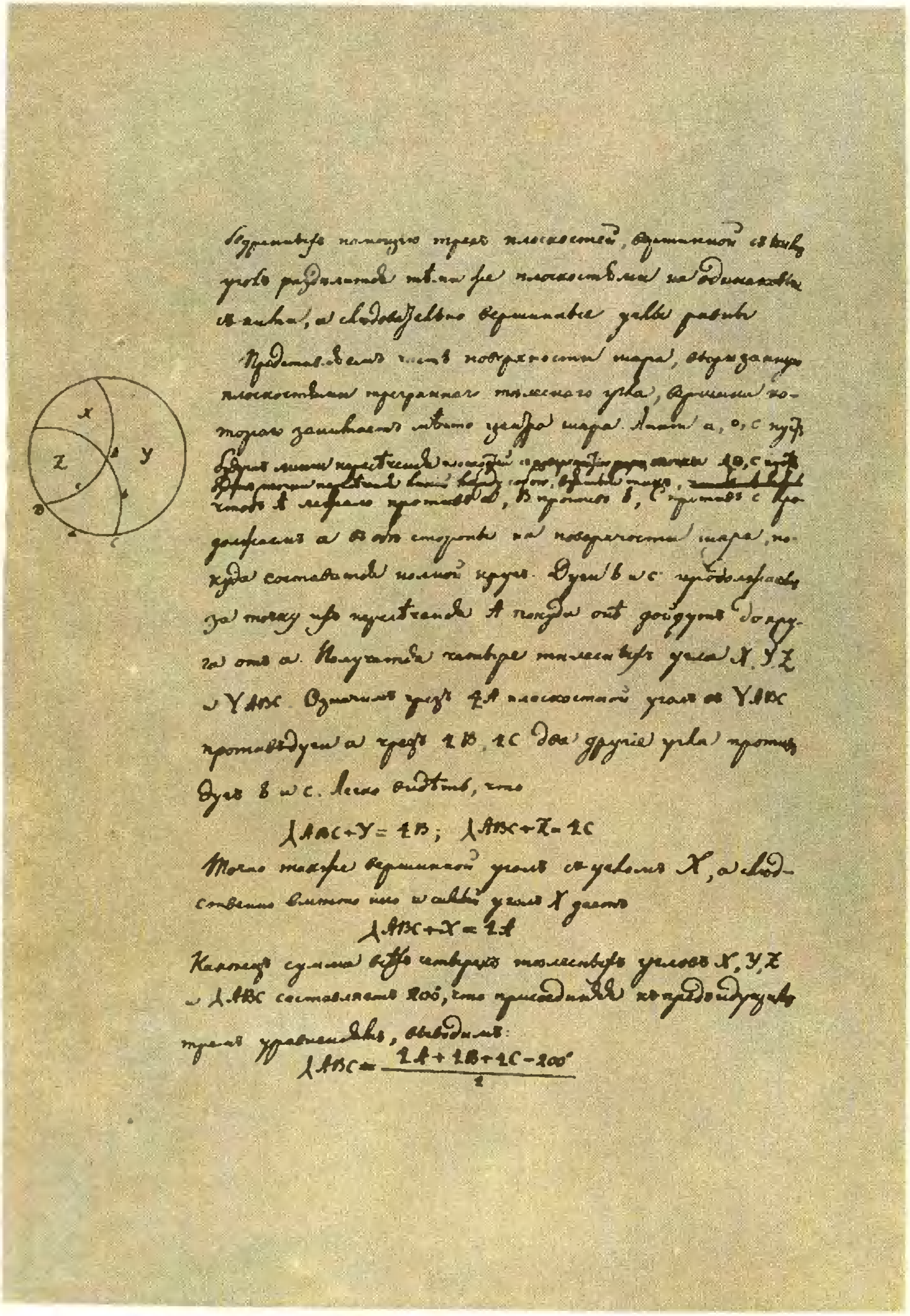
Квант

1976
2

Научно-популярный физико-математический журнал



150 ЛЕТ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО



Будутъ же помощію трехъ плоскостей, вершиной [illegible]
уголъ раздѣленъ такими же плоскостями на одинакія
части, а слѣдовательно вертикальные углы равны.

Представимъ теперь поверхность шара, пересѣкающую
плоскости трегранного тѣлеснаго угла, вершина ко-
тораго занимаетъ мѣсто центра шара. Точки a, b, c пусть
будутъ мѣста пересѣченія [illegible]
[illegible]
[illegible] A лежащаго противъ a, B противъ b, C противъ c. Про-
должимъ a въ обѣ стороны на поверхности шара, по-
куда составится полной кругъ. Дуги b и c продолжимъ
за точку ихъ пересѣченія A покуда онѣ дойдутъ до кру-
га отъ a. Получатся четыре тѣлесные угла X, Y, Z
и YABC. Означимъ чрезъ 2A плоскостной уголъ въ YABC
противолежащій a, чрезъ 2B, 2C два другіе угла противъ
дугъ b и c. Легко видѣть, что

$$\angle ABC + Y = 2B; \quad \angle ABC + Z = 2C$$

Точно также вершиной уголъ съ угломъ X, а слѣд-
ственно [illegible] уголъ X даетъ

$$\angle ABC + X = 2A$$

Наконецъ сумма всѣхъ четырехъ тѣлесныхъ угловъ X, Y, Z
и ∠ABC составляетъ 200°, что присоединивъ къ предыдущимъ
тремъ уравненіямъ, выводимъ:

$$\angle ABC = \frac{2A + 2B + 2C - 200^\circ}{2}$$

Страница из единственной дошедшей до нас полностью геометрической рукописи Н. И. Лобачевского. Это рукопись его учебника «Геометрия» (1823 год).

Основан в 1970 году

Квант

1976
2

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

24 февраля 1826 г на заседании физико-математического факультета Казанского университета Н И Лобачевский сделал доклад, в котором показывалось, что знаменитый пятый постулат Евклида недоказуем Проблема, две тысячи лет неподдававшаяся усилиям математиков, была решена совершенно неожиданным образом!
О Н И Лобачевском, о его замечательных открытиях рассказывается в статьях этого и следующего номеров нашего журнала
Обложка этого номера (1-я и 4-я страницы) выполнена художником Г. Казаковцевым.

Навстречу XXV съезду КПСС

Февраль 1976 года навсегда войдет в историю нашей страны. В этом месяце состоится XXV съезд Коммунистической партии Советского Союза. Съезд подведет итог грандиозной работы нашего народа по выполнению девятого пятилетнего плана и утвердит основные направления развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы.

Основная задача десятой пятилетки в области развития народного хозяйства — резкое повышение качества продукции и эффективности производственной деятельности во всех сферах труда. Недаром эту пятилетку называют «пятилеткой качества».

Успешно завершив девятый пятилетний план развития народного хозяйства, советский народ сделал крупный шаг на пути к коммунизму. В этих достижениях важную роль сыграли физика и математика. Роль этих наук в новом пятилетнем плане будет еще более существенной.

Мы живем в эпоху, которую часто называют эпохой научно-технической революции. Наука в наши дни превратилась в непосредственную производительную силу, могущество которой непрерывно растет. На протяжении последних трех десятилетий мы стали свидетелями грандиозных успехов физико-математических наук, в результате которых возникла ядерная энергетика, идущая на смену традиционной химической энергетике. Родилась ракетно-космическая техника. Появились электронные вычислительные машины. Они сделали доступными решения таких проблем, о возможности решения которых предшествующие поколения могли только мечтать. Ширится производство полупроводников, радиоэлектронной аппаратуры, разнообразных средств автоматизации. Одновременно с этим наука готовит глубокие революционные перемены и в давно существующих отраслях производства — металлургии и машиностроении, легкой и пищевой промышленности, строительстве и сельском хозяйстве. Смысл этих перемен — в необычайно быстром повышении производительности труда, эффективности производства и качества продукции.

В недалеком будущем большинство предприятий превратится в комплексно-автоматизированные производства, на которых человек уже не будет привязан к станку или конвейеру. Все производственные операции возьмут на себя машины и контрольно-управляющие механизмы. Человек же будет создавать эти сложные комплексы машин-автоматов, готовить для них программы работы и контролировать их исполнение, непрерывно совершенствовать производство. На таких заводах производительность труда сделает огромный скачок. А ведь именно небывалый рост производительности труда является, по словам В. И. Ленина, решающим фактором в борьбе за коммунизм.

Комплексно-автоматизированное производство ведет нас к изобилию материальных благ. Атомная и термоядерная энергетика открывают человечеству путь к изобилию энергии. Большая химия создает необычайное богатство исходных материалов и сырья для промышленности. Электронные вычислительные машины позволяют своевременно и четко обрабатывать гигантские количества разнообразной информации, перед которыми человек, лишенный этих средств, бессилен. Так, в ходе научно-технической революции поднимается на новую, качественно более высокую ступень производство, энергетика, материаловедение и управление.

Социалистическое общество открывает широкий простор для новых производительных сил, рождающихся в ходе научно-технической революции. Но полное освоение этих замечательных возможностей требует упорной творческой работы всех трудящихся. Задача исторической важности — органически соединить достижения научно-технической революции с преимуществами социалистической системы хозяйства, поставленная генеральным секретарем нашей партии товарищем Л. И. Брежневым в отчетном докладе на XXIV съезде КПСС, по-прежнему остается одной из главных задач, с которыми мы встречаемся на пути к коммунизму.

Проблема резкого повышения качества продукции и эффективности труда может быть успешно решена только с помощью современной науки. Большой вклад в ее решение должны внести физико-математические науки. Они и сейчас широко используются при определении качества продукции. В основе современных методов массового контроля качества изделий лежат теория вероятностей и математическая статистика. Достижения оптики, физики рентгеновских лучей, физики ультразвука, магнетизма, ядерной физики являются научной основой разнообразной контрольно-измерительной аппаратуры. Оптический и рентгеновский спектральный анализ, магнитная и ультразвуковая дефектоскопия, гамма-излучения радиоактивных источников давно и успешно используются в производстве для измерения толщины изделий и обнаружения скрытых дефектов.

Современная физика предоставляет промышленности принципиально новые методы воздействия на материалы. Концентрированные пучки быстрых электронов и ионов, луч лазера, мощные потоки нейтронов, создаваемые атомными реакторами, сверхсильные магнитные поля и сверхвысокие давления позволяют воздействовать на всю толщу изделий, упрочняя кристаллическую решетку и придавая изделиям необычайную прочность, износоустойчивость, надежность и долговечность. Физика открывает путь к новым технологическим процессам и способам производства, изменяющим облик промышленности, строительства, транспорта и связи.

Возьмем в качестве примера создание атомных двигателей для морского транспорта — ледоколов, подводных лодок. Советские атомные ледоколы «Ленин» и «Арктика» проводят караваны судов зимой в таких высоких арктических широтах, которые совершенно недоступны для обычных ледоколов в это время года. Советские атомные подводные лодки успешно совершают кругосветные плавания, ни разу не всплывая на поверхность океана на всем протяжении своего пути.

Благодаря выдающимся достижениям радиоэлектроники и ракетной техники открывается возможность создания новой международной системы радиорелейной и телевизионной связи, которая позволит передавать телевизионные программы любого государства во все остальные страны мира. Для ее реализации потребуется запустить в экваториальных широтах несколько синхронных (обращающихся вокруг Земли с такой же скоростью, с какой Земля обращается вокруг своей оси) искусственных спутников Земли, снабженных мощными ретрансляционными устройствами. Так возникнет качественно новая система передачи информации.

Наука раскрывает перед человечеством грандиозные перспективы развития и совершенствования всех видов труда. И наиболее полно эти возможности могут быть реализованы только в условиях социализма.

П. Александров

Николай Иванович Лобачевский

Жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнью, чувствовать непременно новое, которое бы напоминало, что мы живем... Будем же дорожить жизнью, пока она не теряет своего достоинства. Пусть примеры в истории, истинное понятие о чести, любовь к отечеству, пробужденная в юных летах, дадут заранее... благородное направление страстям.

Лобачевский

Для многих читателей, незнакомых с обликом Н. И. Лобачевского как ученого, культурного деятеля и просто человека, приведенные только что слова могут показаться неожиданными — настолько они противоречат ходячему представлению о специалисте-математике, все еще неотделимому от представлений об узком, кабинетном ученом. Представление это питается не только традицией, видящей в математике наиболее оторванную от жизни науку, а в ее представителях — сухих людей, живущих вне области действительных интересов и волнений человечества, но и биографиями некоторых даже и очень больших математиков, как бы поддерживающими эту традицию. Лобачевский всей своей личностью, всеми чертами своей деятельности идет вразрез с упомянутой традицией — в истории науки нелегко найти ученого, обладающего такой силой абстрактной мысли, весь жизненный облик которого был бы в то же время наполнен таким широким эмоциональным движением, такой патетикой в лучшем и наиболее подлинном смысле слова, как Лобачевский. И редко у кого личное научное творчество в такой мере, как у Лобачевского, переплеталось с большой общественно-культурной работой, с подлинным служением просвещению родной страны, составлявшим наряду с научным творчеством основное устремление всей жизни и всей личности Лобачевского. Гениальный ученый, принадлежащий — в такой мере, как лишь весьма немногие его сотоварищи по науке — всему человечеству, он в то же время всегда чувствовал себя борцом за русскую национальную культуру, каждодневным строителем ее, живущим ее интересами, болеющим ее нуждами.

1.

Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря 1792 года в Нижегородской губернии в бедной семье мелкого чиновника.

Николай Лобачевский поступил в гимназию в 1802 году, в июле 1806 года был, среди учеников, подвергнут испытанию; однако в университет вместе с некоторыми другими принят не был — «дабы могли себя больше усовершенствовать, и особенно в латинском»; к слушанию университетских лекций он был допущен лишь 9 января 1807 года, а в число студентов Казанского Университета был принят 14 февраля того же 1807 года.

Серьезное увлечение студента Лобачевского математикой началось не сразу — имеются сведения, что он вначале готовил себя к занятиям медициной; его выдающиеся способности проявились скоро — уже весною 1809 года он был выбран в так называемые камерные студенты — так назывались студенты-отличники, избиравшиеся своими же товарищами для наблюдений за занятиями и поведе-

Казанский университет в 1840-е годы. С литографии В. Турина.

нием всех вообще студентов. Однако уже первый, вообще очень лестный отзыв, который университетский инспектор дал Лобачевскому при утверждении его в звании камерного студента, дает почувствовать живой, экспансивный и шаловливый характер молодого студента, в сущности, еще мальчика (не забудем, что Лобачевскому весною 1809 года не было еще и 17 лет!).

В июле 1811 года по постановлению Совета Казанского университета Лобачевский, очевидно, за плохое поведение, звания кандидата не удостаивается, но уже на следующем заседании Совета возводится прямо в степень магистра (утвержден был в этой степени 3 августа 1811 года).

К этому времени Лобачевский уже математик — если в июне 1810 года (когда Лобачевскому еще нет полных 17 лет!) Литтров *) начинает заниматься с ним астрономией «для предварительного приготовления к деланию наблюдений», то в октябре 1811 года Бартельс *) уже занимается с Лобачевским у себя на дому математикой по четыре часа в неделю, проходя с ним недавно вышедшие «Арифметику» Гаусса и первый том «Небесной механики» Лапласа — великие произведения математической мысли, с самого своего появления ставшие классическими. Одновременно Бартельс пишет восторженное письмо о Лобачевском попечителю учебного округа Румовскому. Наконец, в это же время Бартельс привлекает Лобачевского к педагогической работе со студентами на правах его, так сказать, приватного ассистента: «...сверх того, г. Лобачевский будет объяснять слушателям его, г. профессора, чего они недоразумевают»...

За частной ассистентурой у Бартельса не замедлило последовать и начало официальной педагогической деятельности Лобачевского: оно относится к 1812 году, и скромно вы-

*) Литтров Иосиф Антонович — известный астроном, первый профессор астрономии Казанского университета, затем директор Венской астрономической обсерватории.

*) Бартельс Мартин Федорович — выдающийся математик, доктор философии Иенского университета; с 1805 года — профессор Казанского университета по кафедре чистой математики.

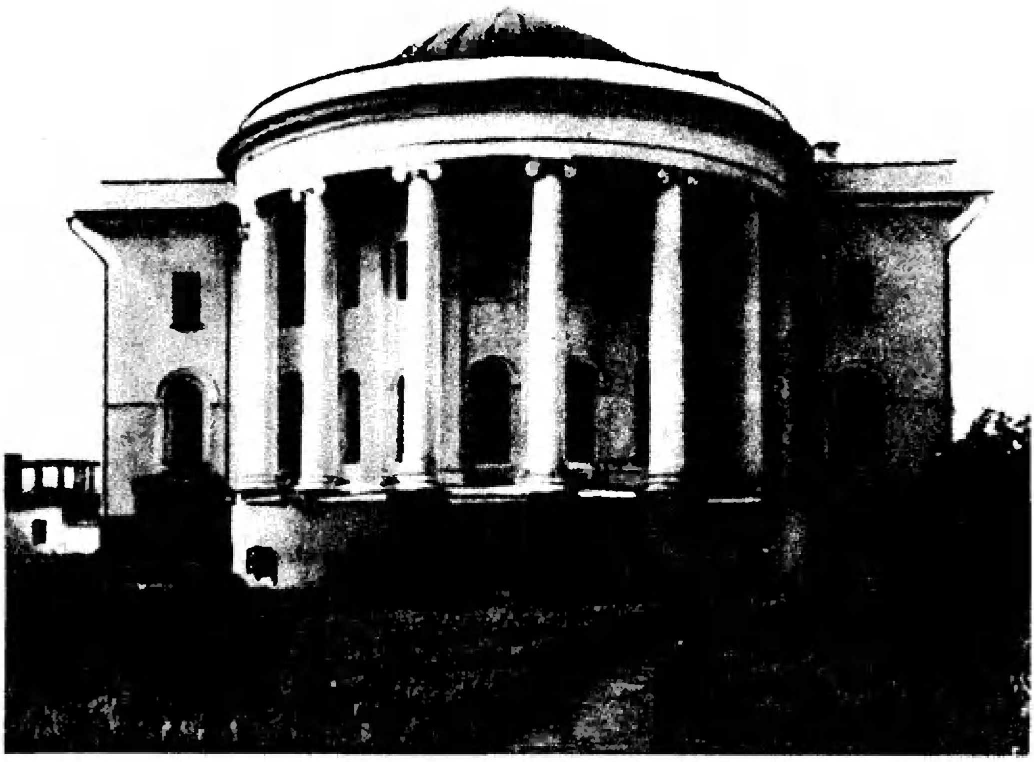
разилось в курсах арифметики и геометрии для готовящихся к экзамену «на чин».

26 марта 1814 года Лобачевский произведен в адъюнкты чистой математики; 1814—1815 учебный год является первым годом университетского преподавания Лобачевского; он читает в университете курс теории чисел по Гауссу и Лежандру. (Теорию чисел «по Гауссу» Лобачевский читает и в 1815—1816 учебном году.) 7-го июля 1816 года Лобачевский был утвержден в звании экстраординарного профессора Казанского университета. В 1816—1817 учебном году он читает в университете курс элементарной алгебры, геометрии и тригонометрии (плоской и сферической) — «по собственным тетрадям», т. е. не опираясь ни на какой определенный литературный источник, в 1817—1818 году читает курс дифференциального и интегрального исчисления по Монжу и Лакруа. Лекции по геометрии, читавшиеся Лобачевским в 1816—1817 учебном году, представляют для нас особый интерес, так как на этих лекциях он, по-видимому, впервые вплотную подошел к тому вопросу, решение которого составило славу всей его жизни,— к вопросу об аксиоме параллельных. Правда, это первое соприкосновение с основным предметом всей его творческой деятельности было еще вполне традиционным — Лобачевский, так же как и многочисленные его предшественники в области неевклидовой геометрии, начал с попыток доказательства знаменитой аксиомы Евклида. Теперь, благодаря дальнейшим работам Лобачевского, мы знаем, что попытки эти не могли привести к удовлетворительному результату. Но такое начало было, конечно, не только естественным, но и единственно возможным как с исторической, так и с психологической точки зрения. Во всяком случае надо считать, что именно в эту пору, когда Лобачевскому было примерно 24 года, возникли первые его геометрические идеи, приведшие его через несколько лет к открытию неевклидовой геометрии.

Юность Лобачевского кончилась. Начался период полного раскрытия богатой и многообразной личности на всех путях взаимодействия с окружавшим ее миром: началось научное творчество, исключительное по его отвлеченной математической силе, началась и быстро развивалась его изумительно многосторонняя, исполненная непреклонной энергии и страстного увлечения работа профессора — вскоре во всех отношениях первого профессора Казанского университета, началось его горячее участие во всех сторонах работы, организации и строительства университета, перешедшее затем в двадцатилетнее полное и единоличное руководство всей университетской жизнью.

II.

Как уже сказано, Лобачевский с 1816 года — профессор Казанского университета; через два года начинается и его административно-организационная деятельность, различные формы которой сопутствуют ему далее в течение трех десятилетий его жизни: в августе 1818 года Лобачевский назначается членом училищного комитета. В эти годы над Казанским университетом, да и над всем вообще российским просвещением собирались темные тучи; реакционные устремления последнего десятилетия царствования Александра I с каждым годом усиливались, делались все более давящими. Наступавшая эпоха в истории русской культуры известна под названием «эпохи Магницкого», по имени знаменитого своим мракобесием попечителя Казанского учебного округа. Казань делается, таким образом, центром и рассадником самой мрачной реакции, захватывающей все области культурной жизни. Тем бо́льшие трудности выпали на долю Лобачевского, который именно в эту

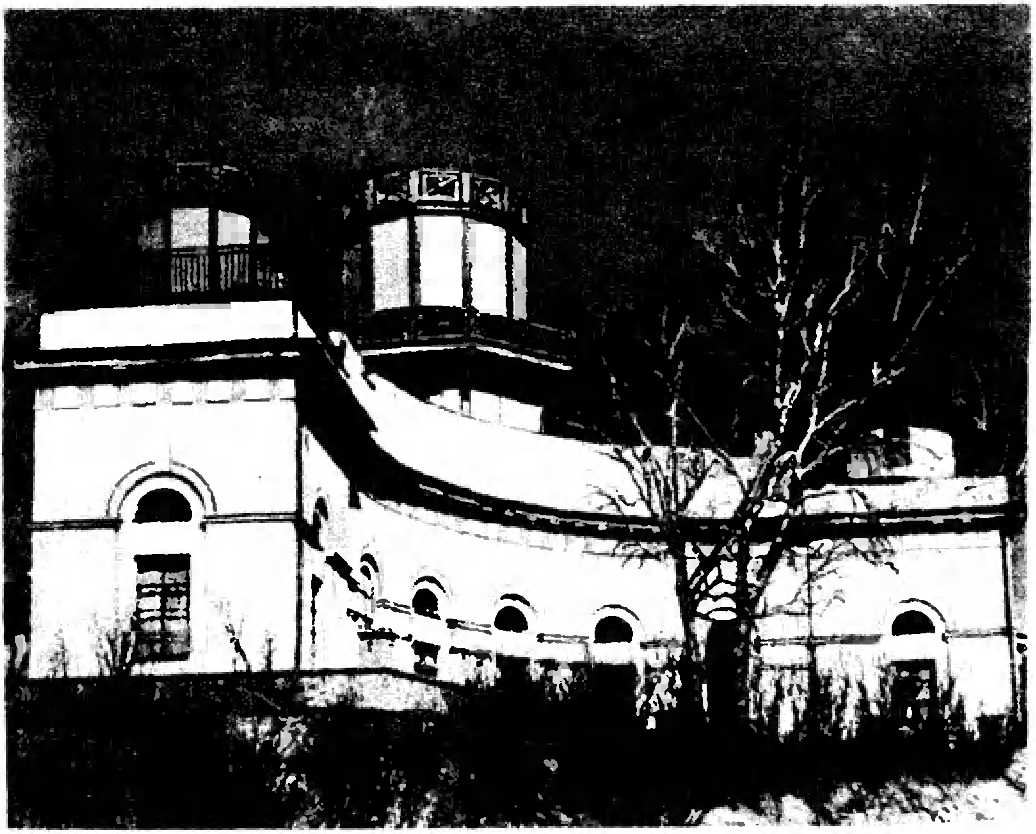


Анатомический театр Казанского университета. Арх. М. П. Коринфский, 1834 —1842 гг. Снимок 1910-х годов.

пору должен был делать свои первые шаги на поприще организационной университетской деятельности. Между тем, как мы сейчас увидим, работа его на этом поприще быстрыми шагами развивалась: в декабре 1819 года Лобачевский вместе с профессором Вердерамо получает поручение по приведению в порядок университетской библиотеки, находившейся в крайне запущенном состоянии. Через месяц, в январе 1820 года, с уходом Вердерамо из университета, вся работа по приведению в порядок библиотеки целиком ложится на плечи Лобачевского. Как и ко всякой взятой на себя работе, Лобачевский отнесся к своим тяжелым и утомительным библиотечным обязанностям с самоотверженной добросовестностью, тратя на их исполнение массу времени и сил. Тем не менее обстановка была такова, что в июне 1821 года он, «обманутый надеждой привести библиотеку в новый порядок», просит об освобождении его от работы в библиотеке.

В конце 1820 года на Лобачевского ложатся еще более ответственные обязанности: 19 ноября он избирается деканом физико-математического факультета. Однако и эта его деятельность заканчивается летом 1821 года, приблизительно одновременно с библиотечной деятельностью.

Профессорская деятельность Лобачевского в эти годы получила существенно новое содержание: ему поручаются кафедры физики и астрономии. В связи с этим Лобачевский два учебных года, 1819—1820 и 1820—1821 годы, математического преподавания не ведет, отдавая себя всецело преподаванию физики и аст-



Астрономическая обсерватория Казанского университета. Арх. М. П. Коринфский. 1834—1842 гг.

рономии. Между прочим, Лобачевский и в дальнейшем не отказывается от преподавания физики и механики, продолжая интересоваться также астрономией и метеорологией. Преподавание математики было возобновлено Лобачевским в 1821—1822 учебном году.

25 февраля 1822 года Лобачевский избирается профессором, а весною следующего 1823 года на него вторично падают обязанности декана.

Однако, еще годом раньше — весною 1822 года,— Лобачевский оказывается перед лицом новых, сложных и утомительных обязанностей, не имеющих никакого отношения к его научной деятельности: образуется строительный комитет по постройке новых и приведению в порядок старых университетских зданий, членом которого был Лобачевский.

Как всегда, Лобачевский отнесся к своим новым обязанностям не только с добросовестностью и серьезностью, но и с огромным увлечением. Через три года, в 1825 году, Лобачевский уже — председатель строительного комитета. Специально изучив как инженерную технику строительного дела, так и собственно архитектуру, Лобачевский в значительной мере делается руководителем строительных работ и в техническом, и художественном отношении. Многие наиболее удачные в архитектурном отношении здания на территории Казанского университета являются осуществлением строительных замыслов Лобачевского. Таковы — анатомический театр, библиотека, астрономическая обсерватория.

Чуть ли не каждый год приносил Лобачевскому то или иное увеличение объема его организационной деятельности: в 1823 году Лобачевский вторично становится деканом физико-математического факультета; в 1825 году он становится университетским библиотекарем, поставив себе задачу, пусть очень большими трудами, но все же положить конец тому состоянию совершенного хаоса, в котором находилась библиотека Казанского университета. Наконец 30 июля 1827 года Лобачевский назначается ректором университета. На этом посту он пребывает целых девятнадцать лет — до 14 августа 1846 года.

Свои обязанности ректора Лобачевский понимал очень широко — от идейного руководства жизнью и работой университета в целом до личного вхождения в повседневные нужды университета. В качестве примеров энергии и активности, проявленных Лобачевским на благо университету, упомянем об его роли во время двух трагических событий, обрушившихся на население Казани в середине прошлого века. Первым из этих событий была холерная эпидемия 1830 года: эпидемия эта (бывшая частью холерной эпидемии 1829—1832 годов) свирепствовала у нас в особенности в Поволжье и унесла многие тысячи жертв. Когда холера в своем распространении достигла Казани, Лобачевский сразу же принял в отношении университета героические меры: университет был фактически изолирован от всего остального города и превращен как бы в крепость. Было организовано проживание и питание студентов на самой университетской территории, все это при самом деятельном участии ректора Лобачевского

Успех был велик — эпидемия прошла мимо университета, среди студентов и работников университета не было, или почти не было, случаев холерного заболевания. Энергичная и самоотверженная работа Лобачевского по борьбе с холерой произвела на все тогдашнее общественное мнение большое впечатление, и официальные инстанции почли необходимым ее отметить: Лобачевскому было выражено «высочайшее благоволение» «за усердие по предохранению университета и других учебных заведений от холеры».

Другим стихийным бедствием, разразившимся над Казанью в эпоху ректорства Лобачевского, был пожар 1842 года. Во время этого ужасного пожара, уничтожившего часть города, Лобачевский вновь принял чрезвычайно энергичные меры по спасению университетских построек и оборудования. В частности, благодаря его распорядительности были сохранены библиотека и астрономические инструменты.

Интересно отметить, что даже будучи ректором, Лобачевский не считал возможным отказаться от обязанностей библиотекаря в течение целых восьми лет: лишь в 1835 году, когда работа библиотеки могла считаться уже вполне налаженной, Лобачевский оставляет место библиотекаря.

Необходимо указать также на издательскую деятельность Лобачевского (с 1823 года он — член издательского комитета). Лобачевский впервые поставил издательское дело в Казанском университете на должную высоту. Он создал «Ученые записки» Казанского университета, явившиеся на смену реакционному и малосодержательному «Казанскому вестнику», организованному Магницким.

Избрание Лобачевского на пост ректора университета было лишь несколькими месяцами отделено от смены попечителя учебного округа: 6 мая 1826 года Магницкого отстранили от должности попечителя за денежные растраты. Отстранение Магницкого, да еще с такой скандальной мотивировкой, не могло не разрядить атмосферу и в округе, и в университете, и это облегчило положение Лобачевского, тем более, что новый попечитель, Мусин-Пушкин, очень уважал Лобачевского и в высшей степени считался с ним. Таким образом, становятся понятными те возможности, которые получил Лобачевский для своей организационной деятельности.

III.

Для них и Солнце, знать не дышит,
И жизни нет в морских волнах,
Лучи к ним в душу не сходили,
Весна в груди их не цвела,
При них леса не говорили
И ночь в звездах нема была.

Тютчев

...но вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим, вы, которых ум отупел и чувство заглохло, вы не наслаждаетесь жизнью! Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архитектура, незанимательна история веков. Я утешаюсь мыслью, что из нашего университета не выйдут подобные произведения растительной природы; даже не войдут сюда, если, к несчастью, родились с таким назначением. Не войдут, повторяю, потому, что здесь продолжается любовь славы, чувство чести и внутреннего достоинства.

Лобачевский

Приведенные слова Лобачевского, как и те, которые взяты эпиграфом к этой статье,— из его знаменитой речи «О важнейших предметах воспитания», произнесенной 5 июля 1828 года, и являющейся программной для всей деятельности Лобачевского как воспитателя юношества. Несомненно, что именно воспитателем юношества в первую очередь чувствовал себя Лобачевский в многообразии своих ректорских обязанностей. Все остальные стороны его организационной деятельности составляли только рамку для двух основных устремлений его жизни: творческой научной деятельности и воспитательной. Эта последняя воспринималась им с исключительной широтой и охватывала все стороны формирующейся личности молодого человека, начиная с физического развития и кончая специальным научным образованием. Проблемы воспитания интересовали Лобачевского во всем их объеме и самым горячим образом. Еще с 1818 года он состоял членом Училищного комитета, ведавшего средними и низшими школами, и с тех пор не терял из виду наряду с вопросами университетского образования и всех сторон собственно школьного преподавания. В частности, постоянно председательствуя в комиссии по приемным экзаменам в университет, Лобачевский прекрасно знал, с какими знаниями школьник того времени приходил в высшее учебное заведение.

Сам Лобачевский обладал в полной мере разнообразием и широтой жизненных интересов, входящих в его идеал гармонически развитой человеческой личности. И он много требовал от молодого человека, пришедшего в университет учиться: он прежде всего требовал от него, чтобы он был гражданином, который «высокими познаниями составляет честь и славу своего отечества». Он подчеркивает, что «одно образование умственное не довершает еще воспитания».

Заметим, между прочим, что Лобачевский уделял внимание и физическому развитию юношества, в частности, содействовал введению занятий гимнастикой в средней школе.

Лобачевский может служить примером, вероятно, самого крупного человека, выдвинутого нашей почти двухсотлетней университетской жизнью. И даже если бы он не написал ни одной строчки самостоятельных научных исследований, мы должны были бы вспомнить о нем как о значительнейшем нашем университетском деятеле. Но в том-то и дело, что Лобачевский, кроме того, был еще и гениальным ученым.

IV.

Размещение научных открытий в жизни сделавшего их ученого не у всех ученых одинаково: у одних оно более или менее равномерно и распределяется если не на всю жизнь, то во всяком случае на значительную часть ее.

ВООБРАЖАЕМАЯ

ГЕОМЕТРІЯ.

(Н. Лобачевскаго.)

КАЗАНЬ.

Въ Университетской типографіи

1835.

Титульный лист книги Н. И. Лобачевского «Воображаемая геометрия».

У других, наоборот, основные идеи рождаются как бы одним сгустком, в течение более или менее короткого периода, а дальнейшая научная деятельность заключается в развитии, обработке и изложении как самих этих идей, так и всего того, что на их почве удается сделать.

Классическим примером ученого, у которого все основное в его научном творчестве осуществилось как бы одним кратковременным взрывом, был Ньютон — все его великие открытия в основном вмещаются в одно пятилетие (1662—1667 годы), между 20 и 25 годами его жизни.

Лобачевский, по-видимому, принадлежит к тому же типу ученого. В 1815—1817 годах он еще пытается доказать пятый постулат (аксиому параллельных) Евклида, а в 1826 году он делает на факультетском заседании свой знаменитый доклад, содержащий уже все основы главного создания всей его жизни — неевклидовой геометрии. Конечно, еще многое Лобачевскому остается сделать: его основные работы по неевклидовой геометрии опубликованы лишь в тридцатых годах, а последняя из его работ, «Пангеометрия», писалась в последний год его жизни; тем не менее можно смело утверждать, что все эти работы являются закономерным развитием идей, которыми он полностью владел уже в 1826 году.

Как ученый Лобачевский является в полном смысле слова революционером в науке: до его открытий никому не приходило в голову сомневаться в том, что евклидова геометрия представляет собой единственную мыслимую систему геометрического познания, единственную мыслимую совокупность предложений о пространственных формах. Лобачевский предположил, что основные пространственные элементы геометрии — точки, прямые, плоскости — удовлетворяют всем основным требованиям евклидовой геометрии, кроме одного: требования, чтобы к данной прямой в данной содержащей ее плоскости можно было провести лишь одну параллельную (Евклидова аксиома параллельных или пятый постулат Евклида). Отвергнув эту аксиому, т. е. предположив, что возможно через данную точку к данной прямой провести по крайней мере две параллельные, Лобачевский из этого предположения и остальных аксиом Евклида вывел стройную цепь теорем, не содержащих никакого противоречия и составляющих особую «геометрию», сильно отличавшуюся от обычной, но столь же безупречную с чисто логической точки зрения. Таким образом, он пришел к следующим заключениям:

1. *Евклидова аксиома параллельных недоказуема, т. е. не может быть выведена из других аксиом Евклида.*

2. *Наряду с обычной евклидовой геометрией можно, не впадая ни в какое противоречие, построить совершенно другую геометрию, причем вопрос о том, какая из двух геометрий фактически осуществляется в физическом мире, есть вопрос не математики, а физики: никаким математическим рассуждением этот вопрос решен быть не может, ответ может быть получен лишь проверкой на опыте.*

Эти выводы Лобачевского современная наука полностью принимает с одной-единственной поправкой: мы считаем в настоящее время, что нельзя ставить столь просто и без дальнейших пояснений вопрос о том, какая именно абстрактно-геометрическая система осуществляется в физическом мире: основные геометрические понятия — точки, прямые и т. п., конечно, взяты из опыта, но не непосредственно, а получаются из опытных данных путем абстракции. Поэтому бессмысленно спрашивать, можно ли «на самом деле» через данную точку к данной прямой провести одну или две параллельные, так как «на самом деле», т. е. в области непосредственных опытных данных, не обработанных математической абстракцией, не существует точек и прямых в том идеализированном смысле, в каком их понимает геометрия, а существуют лишь предметы, более или менее напоминающие точки и прямые. Тем более бессмысленно спрашивать о том, пересекутся или нет две данные «физические прямые» (например, два световых луча), так как никогда и ни в каком физическом опыте эти «прямые» не даны во всей их бесконечной протяженности, а даны лишь большие или меньшие их отрезки. Поэтому единственно, что мы можем утверждать, оставаясь на почве опыта, это что евклидова геометрия является адэкватной идеализацией пространственных представлений, полученных в условиях наблюдения явлений, происходящих на земной поверхности, или, скажем, в масштабе Солнечной системы, но не выходящих из этих масштабов слишком далеко ни в ту, ни в другую сторону, т. е., с одной стороны, не ставящих вопрос о геометрии «мира как целого», а с другой,— не идущих в «микромир», скажем, в пределы атомного ядра.

Геометрия «мировых областей» средней величины есть, конечно, евклидова геометрия — в том смысле, что евклидова геометрия с вполне достаточной точностью описывает все то, что мы в этих областях действительно наблюдаем. Если же выйти за их пределы, то, как обнаруживается в современной физике, могут понадобиться системы, гораздо более сложные, чем даже и неевклидова геометрия, в том смысле, как ее понимал Лобачевский. Тем более нельзя говорить о «единой», неподвижной геометрии, раз навсегда охватывающей все разнообразие пространственных соотношений, которые могут быть отвлечены нашим познанием от окружающего нас материального мира. Бессмертной заслугой Лобачевского является то, что он впервые пробил брешь в восприятии геометрии как единственной мыслимой логической системы.

Вполне понятно, что придя к столь смелым выводам, Лобачевский не мог рассчитывать не только на признание, но даже на простое понимание своих идей — потребовалось полвека для того, чтобы эти идеи вошли в математическую науку и сделались неотъемлемой ее составной частью. Поэтому при своей жизни Лобачевский попал в тяжелое положение «непризнанного ученого». В такое же положение попал и его современник, венгерский ученый Янош Бойяи, который пришел к неевклидовой геометрии независимо от Лобачевского, хотя и опубликовавший свои результаты несколько позднее его. Но какая разница между двумя этими учеными! Если Бойяи был, если так можно выразиться, придавлен непризнанием своих идей и так и не нашел никакого выхода из создавшегося для него в силу этого непризнания действительно глубоко драматического положения, то Лобачевский нашел этот выход в разнообразной, кипучей деятельности. Сила личности Лобачевского восторжествовала не только над всеми трудностями времени, в которое он жил, восторжествовала она и над тем, что для ученого, может быть, труднее всего пережить: над идейной изоляцией, над полным и всесторонним непониманием того, что ему было дороже и нужнее всего — его научных открытий и идей. Не обнаружив никакого противоречия в созданной им геометрической системе и получив полную уверенность в том, что никакого противоречия в ней нет и не может быть, Лобачевский доказательства непротиворечивости не дал и этим открыл возможности для различных субъективных оценок произведенного им переворота в геометрии. Он умер, не дождавшись того, чтобы основное дело всей его жизни было понято и оценено.

Из иностранных математиков только Гаусс понял и оценил Лобачевского вполне. Гауссу же принадлежит и инициатива единственной научной почести, которая выпала на долю Лобачевского: по представлению Гаусса Лобачевский был избран в 1842 году членом-корреспондентом Геттингенского королевского общества наук.

Право на бессмертие в истории науки Лобачевский, несомненно, завоевал своими геометрическими работами; но не следует все же забывать, что и в других областях математики он стоял на уровне современного ему знания и опубликовал ряд работ по математическому анализу, алгебре и теории вероятностей, а также по механике, физике и астрономии.

V.

Если двадцатые и тридцатые годы XIX века были периодом высшего расцвета как творческой, так и научно-педагогической и организационной деятельности Лобачевского, то с середины сороковых годов, и притом совершенно внезапно, для Лобачевского наступил период бездействия. Событием, принесшим с собой этот трагический перелом всей его жизни, было увольнение 14 августа 1846 года с должности ректора. Это произошло вопреки желанию как самого Лобачевского, так и Совета университета. Одновременно произошло и увольнение Лобачевского с должности профессора по кафедре чистой математики. Последнему акту сам Лобачевский, быть может, дал некоторый повод, так как, исполняя с весны 1845 года обязанности попечителя округа вместо переведенного в Петербург Мусина-Пушкина, он, препровождая в министерство постановление Совета университета об избрании его на новое пятилетие на кафедру математики, присовокупил, что «готов отказаться от должности в пользу достойного молодого человека, каков доктор математики Попов».

Увольнение Лобачевского имело все черты грубой служебной дисквалификации, граничившей с прямым оскорблением. Такова была официальная благодарность правительства императора Николая I не только величайшему русскому ученому девятнадцатого века, но и крупнейшему нашему университетскому деятелю.

Вполне понятно, что Лобачевский, для которого его деятельность на поприще университетского образования, да и вообще народного просвещения, была большой и незаменимой частью всей его жизни, воспринял свою отставку как тяжелый, непоправимый удар. Особенно тяжел был этот удар, конечно, потому, что он разразился в ту эпоху жизни Лобачевского, когда его научная работа в основном была уже закончена и, следовательно, университетская деятельность естественно становилась основным содержанием его жизни. Если к этому прибавить исключительно деятельный характер Лобачевского и иметь в виду его привычку, созданную десятилетиями, быть в организационных делах именно руководителем, а не рядовым участником (привычка, на которую Лобачевский воистину имел право!), то размеры разразившейся над ним катастрофы станут вполне ясными. Лобачевский от этой катастрофы оправиться не смог. С весны 1847 года он фактически совершенно отстранился от участия в делах как учебного округа, так и университета. Началась старость — преждевременная, но тем более гнетущая, с прогрессировавшими признаками парадоксально раннего одряхления. Его здоровье быстро шло на убыль. Он стал слепнуть, и к концу своей жизни ослеп совершенно. Его последнее научное произведение — «Пангеометрия» — писалось уже под диктовку. Ко всему этому присоединилась еще смерть сына. Разбитый жизнью, больной, слепой старик, Лобачевский умер 12 февраля 1856 года.

А. Норден

Великое открытие Лобачевского

Легче остановить Солнце, легче двинуть Землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расстояние.

В. Ф. Каган

История великих открытий всегда поучительна. Но как часто остаются неизвестными обстоятельства, при которых они сделаны, и ход мысли, приведший к ним ученого! Вместо этого создаются легенды: об Архимеде, открывшем свой закон в ванне, или о яблоке Ньютона. Известно, однако, что на вопрос о том, как он пришел к своему открытию, Ньютон отвечал: «Постоянно о нем думая»,— но он нигде не описал своих мыслей, пока не привел их к полной ясности.

В этом году отмечается стопятидесятилетие открытия Николаем Ивановичем Лобачевским неевклидовой геометрии. Датой этого открытия условно считается день 24-го февраля 1826 года, когда молодой профессор представил свой доклад физико-математическому факультету Казанского университета. Текст доклада не сохранился, но, по словам автора, его содержание было опубликовано в 1829 году в статье под заголовком «О началах геометрии».

Открытие Лобачевского позволило уже во второй половине прошлого века называть его «Коперником геометрии», но только теперь становится ясным все его значение для математики в целом и для физики. Постараемся вкратце описать идеи великого геометра и осветить ход мыслей, который привел к ним.

История вопроса, разрешенного Лобачевским, занимает два тысячелетия. В третьем веке до нашей эры, в Александрии появилась рукопись «Начал» Евклида, в которой геометрия излагалась в строго систематическом виде, мало отличающемся от того, который до самого последнего времени был принят в учебниках геометрии. В основу построения Евклида положен ряд первоначальных утверждений (*аксиом*), которые не доказываются. Все остальные утверждения (*теоремы*) выводятся из аксиом логически. Среди всех аксиом Евклида выделяется *«аксиома о параллельных»: Две прямые a и b, пересеченные третьей, пересекаются между собой с той стороны, где сумма внутренних односторонних углов α и β меньше суммы двух прямых углов* (рис. 1).

Это положение привлекло внимание продолжателей и комментаторов Евклида по разным причинам. Во-первых, оно было сложнее всех остальных аксиом — например, таких, как «Через две точки проходит прямая» или «Все прямые углы равны». Во-вторых, обратное утверждение *«Сумма двух углов треугольника меньше двух прямых»*, легко доказыва-

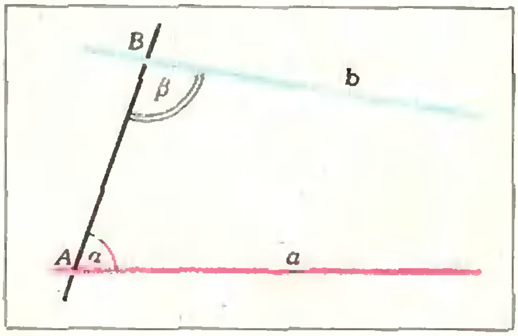


Рис. 1.

лось. И вот создалось мнение, что евклидова «аксиома о параллельных» доказуема, но это доказательство еще нужно найти.

Такое убеждение стало всеобщим, и поиски доказательства аксиомы Евклида продолжались в течение двух тысячелетий в Греции и Византии, на Востоке и в Западной Европе. Все эти поиски не привели ни к чему. «Начала» по-прежнему считались образцом научного изложения, и только теория параллельных казалась требующей улучшения.

К концу XVIII века интерес к этой теории возрос. Во Франции, по почину Даламбера, одного из авторов знаменитой «Энциклопедии», были сделаны первые попытки улучшить изложение Евклида в методическом отношении. Этому требованию отвечал учебник геометрии Лежандра, и в каждом из десяти его изданий приводились все новые и новые «доказательства» аксиомы Евклида, пока в последнем издании автор не признал все эти доказательства ошибочными.

В Германии интерес к аксиоме Евклида получил философскую окраску. Как утверждал выдающийся философ-идеалист И. Кант (1724—1804), неизменность арифметики и геометрии в течение тысячелетий свидетельствует о том, что они не основаны на опыте, а являются учениями о времени и пространстве, которые, по Канту, не существуют во внешнем мире, а лишь соответствуют особенностям человеческого познания. Поэтому аксиомы вполне обоснованы, если они «самоочевидны»; поскольку аксиома Евклида лишена этой самоочевидности, она должна быть доказана.

Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) подошел к теории параллельных иначе, чем его предшественники. Геометрию он начал преподавать сразу после окончания Казанского университета. Записки его лекций 1816—17 годов, дошедшие до нас, еще содержат остроумную попытку доказательства аксиомы Евклида*), но уже в 1823 году он пишет в своем учебнике геометрии: «Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать». Где же искать обоснование теории параллельных, если аксиому Евклида никак не удается логически вывести из других аксиом геометрии? В ответе на этот вопрос Лобачевскому помогает его последовательная материалистическая установка. «Оставьте,— пишет он,— трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на все вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно» **). В другом месте он пишет, четко отвергая идеалистическую априорную концепцию Канта: «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами, врожденным — не должно верить» ***).

Итак, аксиомы, как и все результаты познания, имеют о п ы т н о е происхождение. Но если другие аксиомы геометрии опираются на простое повседневное наблюдение, то аксиома о параллельных носит более сложный характер. Для ее обоснования требуется эксперимент и теория этого эксперимента. Этой теорией, однако, не может быть геометрия Евклида, поскольку именно ее мы и хотим обосновать. Она должна быть более общей и глубокой.

---

*) Они включены в выходящую в этом году книгу: Н. И. Лобачевский, «Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма», М., «Наука».

**) Н. И. Лобачевский, Речь «О важнейших предметах воспитания».

***) Н. И. Лобачевский. «О началах геометрии».

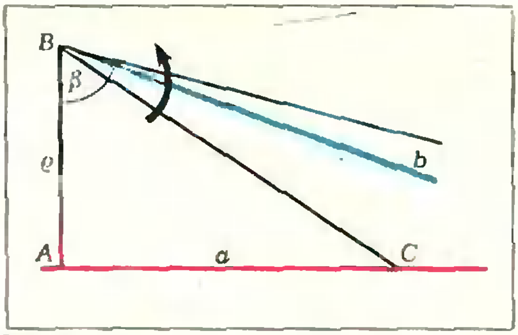


Рис. 2.

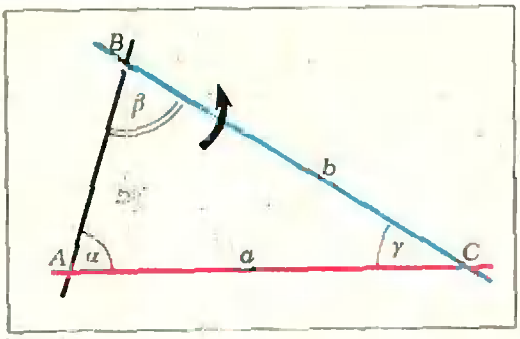


Рис. 3.

Такую теорию и создает Лобачевский. Он называет ее сначала осторожно *«воображаемой» геометрией*, а потом, в конце жизни, *«Пангеометрией»*, то есть геометрией всеобщей.

Вернемся к рисунку 1, предположив для простоты, что угол α прямой (рис. 2). Через точку B можно провести в правой полуплоскости различные лучи, пересекающие прямую a. При вращении против часовой стрелки мы, наконец, встретим п е р в ы й из непересекающихся лучей; он называется *параллельным* прямой a; угол, который этот луч образует с лучом BA, называется *углом параллелизма*. Прямая b, содержащая такой луч, тоже называется *параллельной* a.

Все сказанное справедливо независимо от аксиомы Евклида, которая утверждает, что угол параллелизма — прямой, так что при $\beta < d$ *) луч b пересекает прямую a. Если мы не примем этой аксиомы, то нам придется ограничиться более общим и менее определенным утверждением, что *угол параллелизма* Π *не превосходит* d. На этом предположении и основывает Лобачевский свои дальнейшие рассуждения.

Если $\Pi = d$, то аксиома Евклида соблюдается, и из нее вытекают все предложения обычной геометрии — *евклидовой*, или, как ее называет Лобачевский, — *«употребительной»*. Если же $\Pi < d$, то из этого допущения вытекают совершенно иные следствия, которые составляют содержание новой геометрии — ее Лобачевский и называет *«воображаемой»*, а мы теперь называем *геометрией Лобачевского*.

Многие теоремы «воображаемой» геометрии, к которым при этом приходит Лобачевский, явно противоречат нашим привычным представлениям, и нужна была большая сила мысли, чтобы не принять эти противоречия за логические. Лобачевский владел этой силой и развил свою геометрию с большой полнотой, завершив ее построением своеобразной тригонометрии (которую принято теперь называть *гиперболической*).

Важным разделом геометрии Лобачевского является учение о сумме углов треугольника. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 3), и будем вращать прямую BC (b) против часовой стрелки вокруг точки B. Если мы не принимаем аксиомы Евклида, то должны предположить, что прямая b «оторвется» от прямой a и станет параллельной ей еще прежде, чем сумма углов $\alpha + \beta$ станет равной $2d$. С другой стороны, легко показать, что при вращении прямой b величина угла γ при точке C стремится к нулю. Отсюда следует, что при некотором положении прямой b сумма углов $\alpha + \beta + \gamma$ будет меньше $2d$. Можно показать также, что неравенство $\alpha + \beta + \gamma < 2d$ справедливо для любого треугольника, так что *в геометрии Лобачевского сумма внутренних углов треугольника меньше двух прямых.*

*) d — принятое обозначение величины прямого угла.

Рассматривая число

$$\delta = 2d - (\alpha + \beta + \gamma),$$

которое называется *дефектом треугольника*, Лобачевский выводит следующую замечательную формулу:

$$\delta = \frac{S}{R^2}, \qquad (1)$$

где S — площадь треугольника, а R — число, одинаковое для всех треугольников. Величину R, имеющую размерность длины, называют *радиусом кривизны пространства Лобачевского*, а отрицательную величину $K = -\frac{1}{R^2}$ — *кривизной* этого пространства. В пространстве Евклида $\delta = 0$, и его кривизна считается равной нулю.

Радиус кривизны участвует во всех формулах гиперболической тригонометрии; так, например, имеет место формула

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi}{2} = e^{-\frac{\rho}{R^2}}, \qquad (2)$$

в которой Π — угол параллелизма (рис. 2), ρ — «стрелка», — длина перпендикуляра AB.

Стоит теперь предположить, что $R = \infty$, т. е. что кривизна равна нулю, и мы получим

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi}{2} = 1,$$

а это значит, что угол параллелизма — прямой,— утверждение, равносильное аксиоме Евклида. Вот почему Лобачевский считал, что евклидова геометрия является частным (а лучше сказать, «предельным») случаем его «воображаемой» геометрии.

Формулы (1) и (2) показывают, что различия между евклидовой и неевклидовой геометрией тем меньше, чем больше радиус кривизны пространства. С другой стороны, эти различия будут прежде всего сказываться на фигурах больших размеров: так, для треугольника эти различия увеличиваются вместе с его площадью, а для параллельных прямых — вместе с ростом «стрелки» (Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского не существует подобных фигур. Два треугольника, например, с соответственно конгруэнтными углами конгруэнтны между собой.)

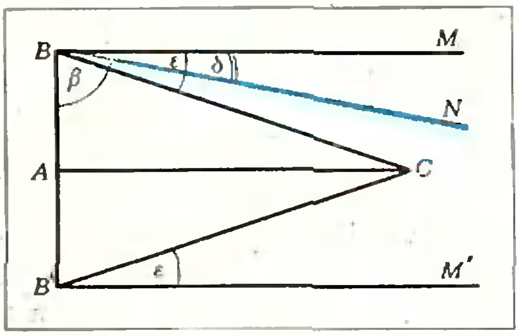


Рис. 4.

Все это было ясно Лобачевскому, когда он поставил вопрос об опытной проверке теории параллельных. Вот что он писал по этому поводу: «Напрасные старания со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставили меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать, и которую проверить могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения» *).

Почему же именно астрономические наблюдения? Да потому, что астрономия наблюдает наибольшие из доступных нам фигур.

Рассмотрим же одну из них. Пусть B — точка, в которой находится Земля, а B' — другая точка, в которую она приходит через полгода, так что $|BB'| = 2|AB|$ — диаметр земной орбиты, A — центр орбиты, а $|AB|$ — радиус (рис. 4). Предположим, что в точке C находится неподвижная звезда, и допустим для простоты, что прямая CA перпендикулярна к плоскости земной орбиты (эклиптики). Если (BM) тоже перпендикулярна этой плоскости, то угол $\varepsilon = \widehat{CBM}$ называется *годичным па-*

*) Н. И. Лобачевский, «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

раллаксом звезды C — иными словами, параллаксом называют половину угла 2ε, на который отклоняется за полгода луч зрения, идущий от земного наблюдателя к неподвижной звезде. (В учебниках астрономии параллаксом называется угол, под которым был бы виден со звезды радиус земной орбиты; но доступен наблюдению только угол ε, а такое определение предполагает заранее, что пространство евклидово.)

Построим луч BN, параллельный лучу AC, и назовем *дефектом параллелизма* угол $\delta = d - \Pi$, дополняющий угол параллелизма Π до прямого. Дефект параллелизма обращается в нуль, если пространство евклидово, и во всяком случае удовлетворяет неравенству

$$\delta < \varepsilon. \qquad (3)$$

Таким образом, *дефект параллелизма, соответствующий стрелке ρ, равной радиусу земной орбиты, меньше любого годичного параллакса.*

Астрономы используют параллаксы при определении расстояний до неподвижных звезд. Параллаксы измерены в большом количестве и с хорошей точностью; наименьшие из них имеют порядок $0{,}05''$ (одна двадцатая угловой секунды). Учитывая это и неравенство (3), можно получить из формулы (2), что с помощью прямых астрономических наблюдений нельзя обнаружить различие между евклидовой и неевклидовой геометриями, если радиус кривизны последней больше шестидесяти световых лет *). С другой стороны, оказывается, что если геометрия космического пространства и отличается от евклидовой, то это отличие незначительно.

Основываясь на подобных рассуждениях, говорит Лобачевский, «наша теория параллельных оправдывает точность всех вычислений обыкновенной геометрии и дозволяет принятые начала этой последней рассматривать как бы строго доказанными» *).

Это высказывание, так же как и другие из первых сочинений Лобачевского, показывает, что первоначально он смотрел на свою «воображаемую» геометрию только как на средство для обоснования евклидовой теории параллельных. Однако в середине 30-х годов, к моменту издания его «Новых начал геометрии с полной теорией параллельных», у него появляется иная точка зрения. «В природе, — говорит Лобачевский, — мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например, геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения, а потому пространство само собой, отдельно, для нас не существует. После чего в нашем уме уже не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей, особой геометрии» **).

Идеи Лобачевского не встретили понимания среди его современников. Только великий немецкий математик Гаусс («король математиков») оценил их по достоинству, но он писал об этом своим друзьям в частных письмах, которые были опубликованы после смерти Лобачевского. В России сочинения Лобачевского встречали только грубые отрицательные отзывы и даже оскорбительные насмешки. Лишь один математик, младший товарищ Лобачевского по кафедре, казанский профессор П. И. Котельников решился в публичной речи произнести пророческие слова: «Труд Лобачевского рано или поздно найдет своих ценителей».

Однако Лобачевский не сдавался, публикуя работы, содержащие раз-

*) Заметим, что во времена Лобачевского астрономических наблюдений было уже достаточно, чтобы убедиться, что «Радиус Вселенной» больше 60 световых лет.

*) Н. И. Лобачевский, «О началах геометрии».

**) Н. И. Лобачевский, «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

личные подходы к новой геометрии и ее приложения к вычислению интегралов. В последней из работ — «Пангеометрии», — которую он, уже слепой, диктовал незадолго до смерти, обсуждается вопрос об осуществимости «воображаемой» геометрии в космическом пространстве.

Идеи великого русского геометра получили всемирное признание только после его смерти. Чтобы понять, как это произошло, нужно вернуться назад. В 1828 году вышла книга Гаусса «Исследования о кривых поверхностях», в которой строится «геометрия на поверхности» или ее *внутренняя геометрия*. Гаусс дал формулы, позволяющие вычислять длины дуг кривых линий на поверхности, определять углы между кривыми или площади ограниченных ими областей, находить *геодезические* (т. е. кратчайшие) линии на поверхности и определять так называемую *гауссову кривизну* — величину, характеризующую отклонение внутренней геометрии поверхности от геометрии плоскости.

Ученик Гаусса, Ф. Миндинг (1806—1885), работавший в Дерпте (ныне город Тарту), изучая так называемую *псевдосферу*, т. е. поверхность постоянной гауссовой кривизны, получил еще в 30-х годах прошлого века некоторые формулы тригонометрии геодезических треугольников на этой поверхности. В 1868 году итальянский геометр Э. Бельтрами обратил внимание на то, что формулы Миндинга совпадают с формулами гиперболической геометрии Лобачевского. Отсюда следовало, что внутренняя геометрия псевдосферы является геометрией Лобачевского.

Таким образом, оказалось, что в евклидовом пространстве можно построить *модель* *) плоскости Лобачевского; этот-то факт и рассеял сомнения в непротиворечивости неевклидовой геометрии и быстро привел ее к всеобщему признанию.

Интерес, вызванный знакомством с идеями Лобачевского, имел важные последствия. С 70-х годов прошлого века начали интенсивно разрабатываться проблемы оснований геометрии. К началу нашего столетия были построены вполне строгие изложения этой науки (Д. Гильберт, В. Ф. Каган), и началась работа по обоснованию арифметики, теории множеств, теории вероятностей и логики, которая продолжается и в настоящее время. В последние десятилетия эта работа стала весьма актуальной, получив приложения к теории математических машин.

Настоящий краткий очерк не дает, конечно, полного представления о геометрии Лобачевского. Желающим более обстоятельно ознакомиться с «воображаемой» геометрией и ее применениями можно рекомендовать в первую очередь книги:

1. П. А. Широков. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, Гостехиздат, М., 1955. Содержит наиболее доступное изложение геометрии Лобачевского.

2. В. Ф. Каган, «Лобачевский и его геометрия». Общедоступные очерки. Гостехиздат, М., 1955.

3. А. П. Норден, Элементарное введение в геометрию Лобачевского. Гостехиздат, М., 1953.

4. А. П. Норден, Вопросы обоснования геометрии в работах Лобачевского. Историко-математические исследования. Выпуск XI, Физматгиз, М., 1958.

*) О моделях и их применении для доказательства непротиворечивости аксиом мы расскажем в следующем номере журнала.

Я. Смородинский

Лобачевский и физика

Математика всегда служила физикам орудием исследования. Кеплер не смог бы сформулировать свои законы, если бы не знал теорию конических сечений. Ньютону для того, чтобы решать задачи механики, пришлось создавать новый раздел математики: дифференциальное и интегральное исчисление. Но и на фоне этих великих открытий открытие неевклидовой геометрии выделяется по тому влиянию, какое оно оказало на наши представления о физической картине мира.

В те годы, когда работал Николай Лобачевский, никто не сомневался в правильности механики Ньютона, а вопросы о природе пространства и времени хотя и интересовали ученых, но казались совсем абстрактными, не имеющими практического значения.

Лобачевского сравнивают с Коперником. Лишив Землю положения центра мира, Коперник открыл Вселенную для исследования. Лобачевский, показав, что евклидова геометрия не единственна, заставил естествоиспытателей задуматься о том, что пространство, в котором развивается Вселенная, также должно быть предметом изучения. Геометрия после Лобачевского лишилась своей абсолютной непогрешимости и обратилась к опыту за подтверждением или отрицанием своих законов.

Лобачевский понимал, что возможность изменения законов геометрии может повлечь за собой и возможность изменения законов механики. «...некоторые силы в природе,— писал он,— следуют одной, другие своей особой геометрии... силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы».

Физики очень долго не обращали внимания на эти предостережения. Только после открытия специальной (СТО) и общей теории относительности (ОТО) стало ясно, какой глубокий смысл содержится в этих словах Лобачевского. Физики должны считать Лобачевского одним из великих творцов своей науки. История неевклидовой геометрии до сих пор служит ярким примером того, как самые абстрактные теории могут привести к полному пересмотру взглядов на наш реальный мир.

Приведем несколько примеров, которые покажут, как идеи геометрии Лобачевского нашли свое отражение в теории относительности. Начнем со специальной теории.

СТО: сложение скоростей

Решая задачи по кинематике, мы пользуемся правилами сложения векторов, предписываемыми геометрией Евклида. При этом и векторы перемещений, и векторы скоростей мы складываем одним и тем же способом.

С открытием специальной теории относительности стало ясно, что сложение скоростей по правилам геометрии Евклида дает практически правильный ответ лишь при условии, что скорости, встречающиеся в задаче, малы по сравнению со скоростью света c. Когда же скорости сравнимы со скоростью света, для получения верного результата необходимо пользоваться иными правилами.

Рассмотрим такой пример. Предположим, что мы наблюдаем с маяка за кораблем, который удаляется с по-

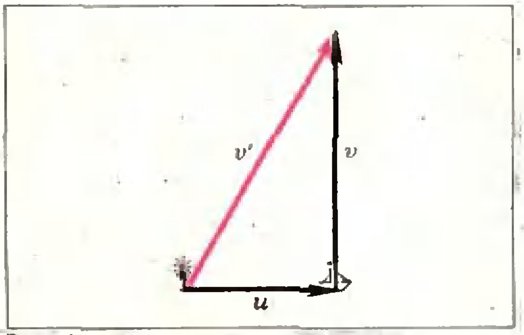


Рис. 1.

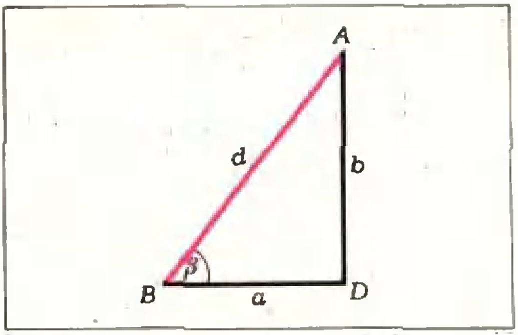


Рис. 2.

стоянной скоростью **u**. С корабля вертикально вверх выпускают ракеты с разными скоростями $\mathbf{v}_i$ относительно корабля ($i=1, 2, 3, \ldots$). Как найти скорости ракет по отношению к маяку (то есть скорости $\mathbf{v}'_i$ ракет в системе отсчета, связанной с маяком)?

С точки зрения механики Ньютона

$$\mathbf{v}'_i=\mathbf{u}+\mathbf{v}_i \qquad (*)$$

— суммарный вектор $\mathbf{v}'_i$ может быть найден по правилу треугольника (рис. 1).

Решение этой задачи в специальной теории относительности содержит математические трудности, преодолеть которые большинство наших читателей не сможет. Поэтому мы приведем только ответ:

$$\mathbf{v}'_i=\mathbf{u}+\mathbf{v}_i\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}^{\,*)}. \qquad (**)$$

В тех случаях, когда скорости **u** и **v** много меньше скорости света c, формула (**) практически переходит в формулу (*).

Но когда **u** и $\mathbf{v}_i$ становятся сравнимы со скоростью света, точное значение скорости $\mathbf{v}'_i$ может быть найдено только по формуле (**)— именно кинематика СТО описывает движение тел с большими скоростями.

Очевидно, что при сложении векторов **u** и $\mathbf{v}_i$ по евклидову правилу треугольника ответ (**) не может быть получен.

Обратим еще раз внимание на тот факт, что мы пользуемся геометрическими терминами и правилами, но применяем их не к обычному пространству, а к набору скоростей, о котором говорят, что он образует пространство скоростей. Пользуясь этой терминологией, из всего сказанного можно сделать вывод: пока мы остаемся в рамках классической механики, пространство скоростей совпадает с евклидовым пространством; в механике СТО для описания пространства скоростей геометрия Евклида неприемлема.

Какой геометрический образ можно сопоставить пространству скоростей в релятивистской механике? Оказывается, этим геометрическим образом может служить пространство Лобачевского. Но переход от физических величин к их геометрическим образам в релятивистском случае *не* так прост, как в классическом. Изображая на евклидовой плоскости (на листе бумаги) скорости, мы рисуем отрезки, длины которых (в определенном линейном масштабе) равны значениям скоростей. Для того чтобы *представить себе, как перейти* от скоростей к отрезкам на плоскости Лобачевского, вернемся вновь к задаче о маяке, корабле и ракете.

Итак, для скорости $\mathbf{v}'$ ракеты в системе отсчета, связанной с маяком, специальная теория относительности дает ответ (**). Оказывается, на плоскости Лобачевского скоростям **u**, **v**, $\mathbf{v}'$ соответствует прямоугольный треугольник, длины сторон которого равны значениям некоторой нелинейной функции f от величин скоростей u,

*) Напомним, что скорости **u** и $\mathbf{v}_i$ взаимноперпендикулярны. Решение (**) записано именно для такого случая.

v, v'. Будем считать, что треугольник BAD (рис. 2) нарисован на плоскости Лобачевского,

$$|a| = f(|\mathbf{u}|), \quad |b| = f(|\mathbf{v}|), \quad |d| = f(|\mathbf{v}'|)\ ^{*})$$

Нахождение скорости $\mathbf{v}'$ сводится к нахождению по правилам геометрии Лобачевского стороны d треугольника BAD по двум известным сторонам a и b и прямому углу между ними *). Угол β треугольника BAD — это угол, который составляет скорость $\mathbf{v}'$ с горизонтом. Правило, по которому строится сторона d, — это привычное для нас правило треугольника. Однако формулы, позволяющие определить длину стороны d, в геометрии Лобачевского иные, чем в геометрии Евклида (например, в рассматриваемой нами задаче теорема Пифагора неприменима). Но в том случае, когда скорости u и v много меньше c, эти формулы практически совпадают с формулами геометрии Евклида. Можно сказать, что СТО находится в таком же отношении к классической механике Ньютона, как геометрия Лобачевского к геометрии Евклида.

В рассмотренной нами задаче можно дать «физическое» представление геометрического понятия параллельности. Чем больше скорость ракеты $\mathbf{v}_i$, тем больше угол α, который составляет скорость $\mathbf{v}_i'$ с горизонтом. В классической механике скорость $\mathbf{v}_i$ может быть как угодно велика.

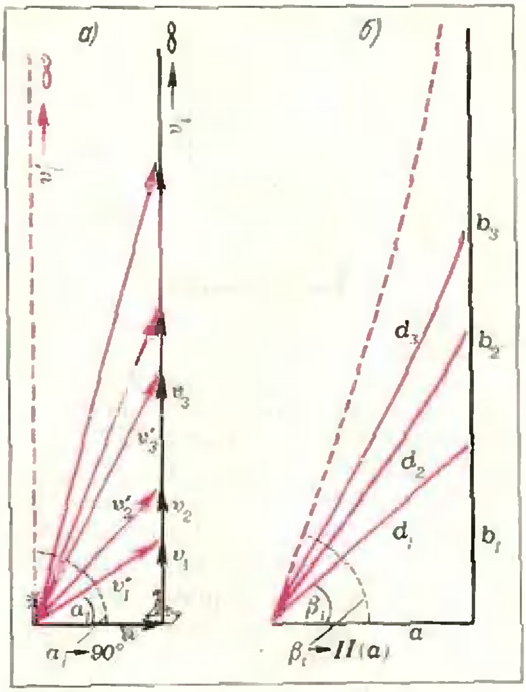


Рис. 3.

При $\mathbf{v}_i \to \infty$ $\alpha \to 90°$. То есть в этом предельном случае направления $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}_i'$ становятся практически параллельными. Таким образом, параллельные прямые евклидовой геометрии с точки зрения физики — это векторы скоростей бесконечно быстрой ракеты, рассматриваемой из разных систем отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно с конечными скоростями (рис. 3, *а*).

Согласно СТО скорость ракеты $\mathbf{v}_i$ не может быть больше скорости света c. В том случае, когда $|\mathbf{v}_i| = c$ — с корабля выпускают квант света (фотон), — величина скорости $\mathbf{v}_i'$ также равна c. Действительно (см. (**)),

$$(v_i')^2 = u^2 + v_i^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right).$$

Подставив в это выражение $v_i = c$, получим $v_i' = c$.

На плоскости Лобачевского в этом случае стороны b и d (соответствующие скоростям v_i и v_i') становятся бесконечно длинными (см. рис. 3, *б*). Но угол β, который составляет сторона d со стороной a (соответствующей скорости u), при этом остается

---

*) Для тех, кто знаком с натуральными логарифмами, приведем вид функции f:

$$f(|\mathbf{v}'|) = \frac{1}{2}\ln\frac{c + v'}{c - v'} = d$$

Чтобы от стороны d перейти к значению скорости $\mathbf{v}'$, надо совершить обратный переход:

$$|\mathbf{v}'| = g(d) = c\,\frac{e^{d} - e^{-d}}{e^{d} + e^{-d}}.$$

**) В общем случае, когда скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ составляют друг с другом не прямой угол, на плоскости Лобачевского в соответствующем треугольнике угол между сторонами a и b равен углу между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

меньше 90°. В геометрии Лобачевского этот угол называется углом параллельности и обозначается $\Pi(a)$. Но β— это тот угол, который в системе отсчета, связанной с маяком, составляет скорость v' с горизонтом. Величина этого угла определяется условием $\cos\beta=\frac{u}{v'}=\frac{u}{c}$. Это предельный, максимальный угол, под которым наблюдатель в этой системе может «увидеть» скорость фотона. Поэтому естественно возникает «физический» образ параллельных прямых геометрии Лобачевского: это скорости фотона, наблюдаемые из разных равномерно движущихся систем отсчета.

Ко всему, что мы рассказали, можно добавить, что специальная теория относительности развивалась независимо от геометрии Лобачевского. Все ее формулы были получены Эйнштейном методами механики. Только в 1909 году немецкий физик Зоммерфельд обнаружил тождественность всего математического аппарата СТО с геометрией Лобачевского.

Развитие современной физики, таких ее областей как ядерная физика, физика элементарных частиц, невозможно без теории относительности. Если читать учебник по неевклидовой геометрии, то каждой теореме, каждой задаче можно сопоставить задачу из физики элементарных частиц. И при расчете путей частиц в ускорителях, процессов столкновения элементарных частиц формулы геометрии Лобачевского оказываются очень полезными — вычисления становятся короче и проще.

ОТО: кривизна пространства

Вероятно, каждый может себе представить, как выглядит поверхность шара с точки зрения двумерного жука, который по ней ползает. Очевидно, что его восприятие не совпадает с нашим. Мы можем посмотреть на шар «со стороны», из трехмерного пространства, и увидеть, что поверхность его — сфера. А для двумерного жука, который этого сделать не может,— для него нет третьего измерения,— поверхность сферы представляется плоскостью. И если размеры жука много меньше радиуса сферы, то он заключит, что эта плоскость — евклидова. Но если жук «грамотный», то, проведя некоторые измерения, он может убедиться, что геометрия на его плоскости отличается от евклидовой. Например, измерив сумму углов очень большого треугольника, он обнаружит, что она отличается от 180°.

Живя в трехмерном пространстве, мы в какой-то степени находимся в положении жука. Геометрию этого пространства мы моделируем на основе повседневного опыта. И до тех пор, пока мы имеем дело с обычными для нас земными расстояниями, опыт говорит, что окружающее нас пространство — евклидово. А что можно сказать о геометрии пространства в масштабах нашей галактики, всей Вселенной? Этот вопрос, по существу, был впервые поставлен Лобачевским. Справедливы ли законы геометрии Евклида при громадных (с точки зрения Земли) расстояниях? Действительно ли, например, сумма углов очень большого треугольника равна 180°? Основываясь на данных, полученных из астрономических наблюдений, Лобачевский пытался найти ответ на этот вопрос. Вывод его был таким: «... в треугольнике, которого бока равняются почти с расстоянием Земли до Солнца, сумма углов не может разниться с двумя прямыми более 0,0003 секунды градуса».

Хотя Лобачевский и не обнаружил отклонений от законов Евклида, но сама мысль о том, что мир, в котором мы живем, может не быть евклидовым, была поистине революционной.

За 150 лет, прошедших со времени создания Лобачевским его геометрии, наука сделала огромный шаг на пути познания реального мира. И самым важным этапом на этом пути явилось создание Эйнштейном общей теории относительности. Она установила связь между силой всемирного тя-

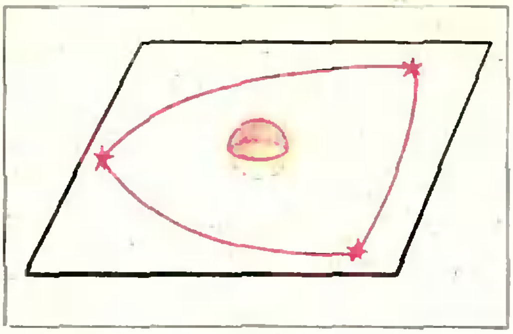


Рис. 4. В плоскости, проходящей через Солнце, сумма углов большого треугольника, вершины которого — звезды, больше 180°.

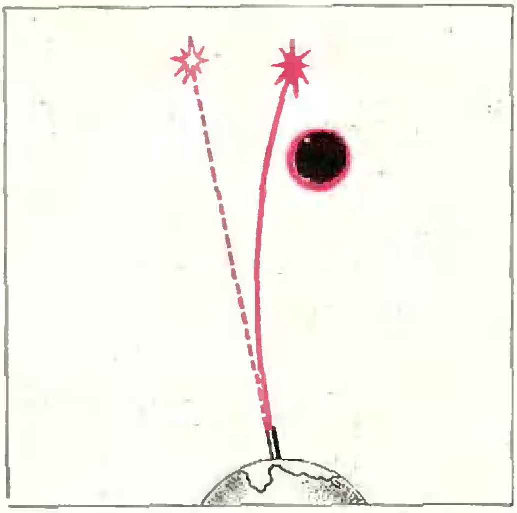


Рис. 5. Этот опыт проводился во время полного солнечного затмения. По расчетам звезда в это время находилась за краем Солнца. Однако вследствие искривления световых лучей, идущих от звезды, в поле тяготения Солнца звезда наблюдалась на некотором расстоянии от солнечного диска (во время затмения солнечный свет «загораживается» Луной, и звезды, расположенные вблизи Солнца, становятся видимыми).
Согласно ОТО угловое смещение звезд непосредственно у края Солнца должно составлять $\approx 1''.75$ ($1''$ — это угол, под которым спичечная коробка видна с расстояния ~ 10 *км*). Опыты, проводимые во время солнечных затмений, дают несколько бо́льшие значения. Однако, эти результаты, несомненно, являются подтверждением кривизны пространства.

готения и свойствами пространства. Основной вывод, который следует из ОТО, заключается в том, что пространство, в котором мы живем, искривлено. Вблизи тяжелых тел, например, вблизи Солнца, механика становится не ньютоновой, а геометрия пространства — неевклидовой (см. рис. 4).

Свет, проходя мимо Солнца, движется по кривой, похожей на параболу. Поскольку прямая — это, по определению, луч света, распространяющегося в однородной среде, то в пространстве вблизи Солнца прямая — это искривленный световой луч. Степень искривленности пространства характеризуется кривизной луча. Радиус кривизны*) светового луча в точке, находящейся на расстоянии r от Солнца, называют радиусом кривизны пространства в этой точке. ОТО дает для него следующую формулу:

$$R=(r^3/2R_{гр})^{1/2}.$$

Здесь r — расстояние до Солнца, а $R_{гр}$ — так называемый гравитационный радиус Солнца, величина которого характеризует степень влияния Солнца на геометрию окружающего его пространства:

$$R_{гр}=\frac{2\gamma M}{c^2}\approx 3 \text{ км},$$

где $M\sim 10^{33}$ *г* — масса Солнца, $c=3{,}00\cdot 10^8$ *м/сек* — скорость света, $\gamma=6{,}67\cdot 10^{-11}$ *н·м²/кг²* — гравитационная постоянная.

В 1919 году во время солнечного затмения были произведены астрономические наблюдения, результаты которых подтвердили выводы ОТО (рис. 5).

*) Радиусом кривизны кривой в точке A называется радиус окружности, дуга которой в окрестности точки A точнее дуг всех других окружностей «совпадает» с дугой кривой.

Теория относительности является незаменимым аппаратом в изучении свойств Вселенной. В настоящее время существует много моделей Вселенной. О справедливости их, о том, какая из них в действительности описывает свойства Вселенной, можно будет судить по результатам экспериментов. Но эти эксперименты чрезвычайно сложны, многие из них пока лишь «мысленные», для их осуществления современная наука не обладает возможностями. Но среди этих моделей есть такие, согласно которым геометрия пространства — это геометрия Лобачевского.

Геометрические свойства Вселенной изменяются со временем; астрономы видят, как разбегаются галактики и квазары; совсем недавно в созвездии Лебедь была открыта первая «черная дыра»— точка, где плотности обращаются в бесконечность, а длины в нуль. И наука может объяснить эти явления только потому, что 150 лет назад на берегу Волги молодой казанский математик Николай Лобачевский спросил: а так ли очевидно, что через точку вне прямой можно провести только одну прямую, не пересекающую данную? Кто мог подумать тогда, что это был один из самых каверзных вопросов, который когда-либо задал человек природе.

Физики шутят

Чему равен один год?

Недавно замечательный американский физик Р. Фейнман высказал важную космологическую гипотезу:

$$1\ \textit{год} = \pi\cdot 10^7\ \textit{сек}. \qquad (1)$$

где π — число Архимеда.

Докажем справедливость этой интересной гипотезы.

Известно, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите, радиус которой равен $R \doteq 150$ *млн. км*. Орбитальная скорость Земли равна $v = 30$ *км/сек*.

Если бы с такой постоянной скоростью Земля двигалась не по самой орбите, а по ее диаметру, то она прошла бы от одного «края» орбиты до другого за время

$$t = \frac{2R}{v} = \frac{2\cdot 150\cdot 10^6}{30} = 10^7\ \textit{сек}. \qquad (2)$$

По определению один год есть время обращения Земли по ее орбите вокруг Солнца. Понятно, что это время относится к найденному выше времени t, как длина окружности орбиты к ее диаметру. Последнее отношение для всякой окружности, согласно Архимеду, есть π. Отсюда следует, что $1\ \textit{год} = \pi\cdot t$. Подставляя сюда значение t из (2), приходим к формуле (1).

Итак, мы доказали справедливость гипотезы Фейнмана. Более того, мы выяснили физический смысл константы 10^7, входящей в формулу (1).

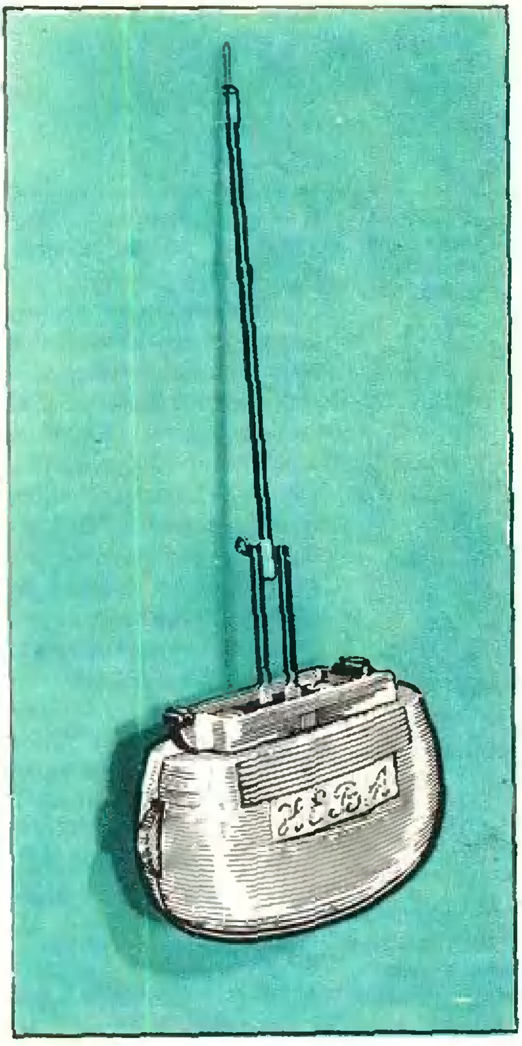
Для проверки справедливости гипотезы Фейнмана был поставлен следующий эксперимент: с помощью настенных часов «Маяк» мы определили продолжительность 1975 года. Она оказалась равной $3{,}15\cdot 10^7$ *сек*. Формула (1) дает $3{,}14\times 10^7$ *сек*. Мы склонны думать, что полученное расхождение теоретических и наблюдаемых данных есть результат одного из двух следующих эффектов: а) орбита Земли отличается от круговой, б) пространство — время искривлено.

Замечательно, что наше решение позволяет обобщить гипотезу Фейнмана и для других планет.

1976 год, январь, Бюраканская обсерватория

А. Натанзон, М. Плоткин

Маятник с вибрирующим подвесом



Как известно, неподвижное тело находится в состоянии устойчивого равновесия, когда его потенциальная энергия минимальна. В частности, для математического (или физического) маятника потенциальная энергия минимальна, когда его центр тяжести находится под точкой подвеса. Конечно, у такого маятника есть положение равновесия и в перевернутом состоянии, когда центр тяжести расположен выше точки подвеса, но это положение неустойчиво. Договоримся, что мы будем рассматривать такой математический маятник, у которого нерастяжимая невесомая нить заменена жестким невесомым стержнем. Однако не всегда положение центра тяжести тела над точкой опоры исключает устойчивое равновесие. Например, детская игрушка юла не падает, пока вращается достаточно быстро. И не только вращение может повысить устойчивость тела.

Оказывается, при быстрых вертикальных колебаниях подвеса маятника (т. е. точки закрепления) перевернутое положение маятника становится устойчивым. В этих условиях он способен стоять в вертикальном положении или плавно качаться около него (рис. 1). Количественное исследование этого явления связано со значительными математическими трудностями. В 1951 году академику П. Л. Капице удалось приближенно описать поведение маятника с вибрирующим подвесом для случая, когда длина маятника L много больше амплитуды вибраций подвеса x_0 и частота вибраций намного превосходит собственную частоту колебаний маятника. Мы же ограничимся лишь качественными рассуждениями.

Если при наблюдении не обращать внимания на мелкое дрожание маятника, связанное с вибрацией подвеса, то его плавное движение будет таким, как если бы на маятник действовал момент сил, стремящийся приблизить

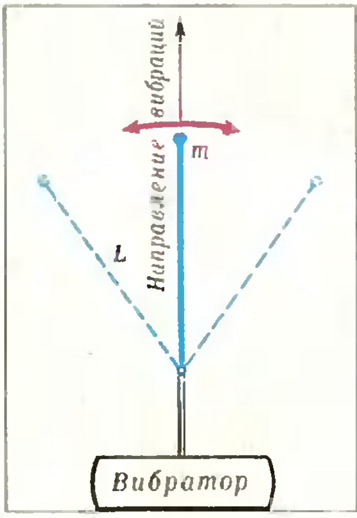


Рис. 1.

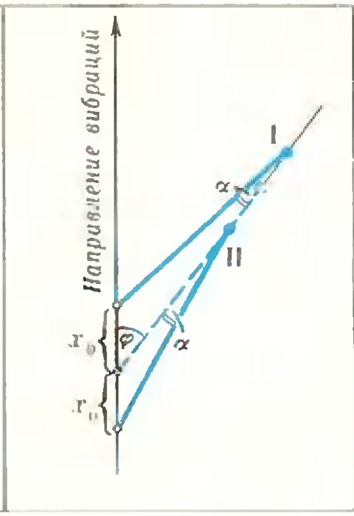


Рис. 2.

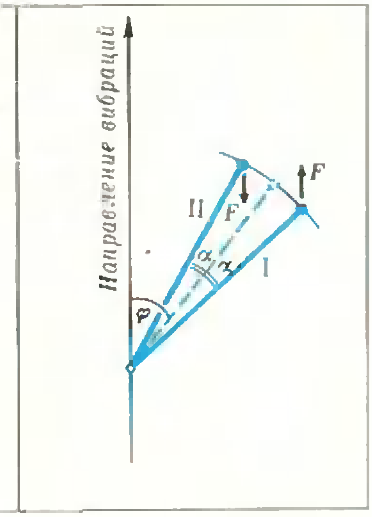


Рис. 3.

его к направлению вибраций. Этот фиктивный момент сил П. Л. Капица назвал «вибрационным».

Попробуем понять причину возникновения вибрационного момента. Предположим сначала, что силы тяжести отсутствуют. Пусть подвес маятника колеблется вдоль направления вибраций с амплитудой x_0 и частотой ω по гармоническому закону $x = x_0 \cos \omega t$. Допустим, что маятник составляет с направлением вибраций угол φ (рис. 2). Перемещение подвеса можно разложить на два перемещения: вдоль маятника и перпендикулярно к нему. Первое лишь смещает груз вдоль линии стержня, а второе поворачивает стержень, не смещая груза (углы поворота предполагаются малыми). Поэтому при наибольших отклонениях маятник займет положения I и II (см. рис. 2).

Удобнее рассматривать поведение маятника в системе отсчета, связанной с подвесом. Положения маятника I и II в этой системе показаны на рисунке 3. Выбранная система отсчета является неинерциальной *), поэтому в ней на маятник (т. е. на массу, сосредоточенную на его конце) будет действовать сила инерции, равная $\mathbf{F} = -m\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — ускорение подвеса в данный момент времени.

Так как подвес колеблется по гармоническому закону, то проекция его ускорения изменяется тоже по гармоническому закону: $a = -\omega^2 x = -\omega^2 x_0 \cos \omega t$. В крайних положениях I и II ускорение соответственно равно $-\omega^2 x_0$ и $+\omega^2 x_0$. Поэтому сила $\mathbf{F}$, проекция которой равна в этих положениях $F = \pm m\omega^2 x_0$, направлена, как показано на рисунке 3. Очевидно, что момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки подвеса в положении I больше, чем в положении II, а так как время действия ее «вверх» равно времени действия «вниз» (по половине периода вибрации, то в итоге маятник должен смещаться вверх, т. е. по кратчайшему пути к направлению вибраций.

Вибрационный момент $M_в$, под действием которого происходит это смещение, пропорционален разности моментов силы $\mathbf{F}$ в положениях I и II. Найдем эту разность.

Пусть маятник отклонен на угол φ от направления вибраций подвеса. Как видно из рисунка 2, угловая амплитуда мелких вибраций маятни-

*) См., например, статью Я. А. Смородинского «О силах инерции», «Квант», 1974, № 8.

ка $\alpha \approx \frac{x_0 \sin\varphi}{L}$, где L — длина маятника. Эта же амплитуда изображена и на рисунке 3. Тогда

$$M_{\rm I} - M_{\rm II} = FL[\sin(\varphi+\alpha) - \\ -\sin(\varphi-\alpha)] = 2FL\sin\alpha\cos\varphi.$$

Так как $\frac{x_0}{L} \ll 1$, то

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{x_0 \sin\varphi}{L}.$$

Значит,

$$M_{\rm в} \sim M_{\rm I} - M_{\rm II} \approx m\omega^2 x_0^2 \sin 2\varphi.$$

Такое качественное рассмотрение позволяет понять причины появления вибрационного момента и установить правильную зависимость этого момента от амплитуды вибраций подвеса, частоты вибраций, массы маятника и угла отклонения φ, но не позволяет найти значения коэффициента пропорциональности. Более строгое рассмотрение, проведенное П. Л. Капицей, приводит к соотношению

$$M_{\rm в} = \frac{m\omega^2 x_0^2}{4}\sin 2\varphi. \qquad (1)$$

Пользуясь понятием вибрационного момента, напишем теперь условие равновесия маятника в поле силы тяжести. Будем считать, что вибрации подвеса происходят в вертикальном направлении. Кроме вибрационного момента $M_{\rm в}$ на маятник действует еще момент силы тяжести $M_{\rm т} = mgL\sin\varphi$. В положении равновесия эти моменты равны:

$$mgL\sin\varphi = \frac{m\omega^2 x_0^2}{4}\sin 2\varphi,$$

или

$$\sin\varphi\left(\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2} - \cos\varphi\right) = 0. \qquad (2)$$

Удовлетворяющие этому уравнению значения φ являются положениями равновесия. Они таковы:

$$\varphi_1 = 0,$$
$$\varphi_2 = 180°, \qquad (3)$$
$$\varphi_{3,4} = \pm\arccos\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2}.$$

Здесь $\varphi_1 = 0$ — верхнее положение грузика, $\varphi_2 = 180°$ — нижнее положение грузика.

Рассмотрев соотношение величин вибрационного момента и момента силы тяжести около положений равновесия, можно убедиться, что φ_1 и φ_2 — устойчивые положения, а φ_3 и φ_4 — неустойчивые. Таким образом, если маятник находится в области A (рис. 4), то он будет колебаться около положения φ_1, а если в области B, — около положения φ_2. Из (3) видно, что если $\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2} = 1$, то $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4$ и положение φ_1 станет неустойчивым. Значит, для существования устойчивого равновесия перевернутого маятника необходимо, чтобы $\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2} < 1$.

Несколько более сложен для анализа случай, когда направление вибраций составляет некоторый угол с вертикалью. Но, оказывается, что устойчивое положение перевернутого маятника возможно при любом направлении вибраций. Правда, параметры маятника не могут быть при этом произвольными. Расчет дает, что если $\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2} < 0{,}5$, то положение

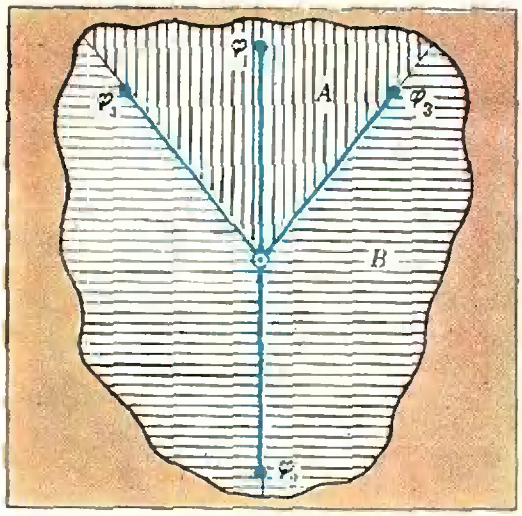


Рис. 4.

устойчивого равновесия перевернутого маятника всегда найдется.

В заключение предлагаем вам провести самостоятельно экспериментальные исследования поведения маятника с вибрирующим подвесом.

В лабораторных условиях обычно для этой цели используют кривошипно-шатунный механизм, насаженный на вал мотора. В качестве маятника удобно использовать легкий металлический стержень или кусок толстой проволоки длиной 15—20 *см*. При скорости вращения 3 000 *об/мин* достаточно амплитуды вибраций подвеса 5—6 *мм*.

Следует обратить внимание на то, что для стержня, являющегося физическим, а не математическим маятником, во всех формулах выражение $\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2}$ необходимо заменить на $\frac{4gL}{3\omega^2 x_0^2}$.

«Необычное» поведение маятника с вибрирующим подвесом легко можно наблюдать и в домашних условиях. Нужно только иметь электробритву типа «Нева», «Москва» или «Эра» и два пустых стержня от шариковой ручки. Сняв ножи с электробритвы, надо надеть на ножки вибратора бритвы по отрезку стержня длиной 3—3,5 *см* и проткнуть их концы проволочкой или булавкой (см. заставку к статье). (Такая длина отрезков обеспечивает их резонанс при колебаниях, что увеличивает амплитуду вибраций до нескольких миллиметров.) Эта же проволочка пронизывает конец целого стержня, который и является маятником.

Заметим, что этот опыт совершенно безопасен для электробритвы.

Задачи наших читателей

1. Докажите, что в квадрате чисел

$$\begin{array}{ccccc} * & \times & * & = & b \\ : & & \times & & - \\ * & : & * & = & * \\ * & \div & * & = & * \end{array}$$

в котором * заменяет некоторые натуральные числа, число b всегда равно шести. Сколькими разными способами можно расшифровать эту запись?

У. Шулте (г. Сигулда)

2. Ни одно из трех целых чисел a, b, c не делится на три. Докажите, что тогда делится на три

а) $a^2+b^2+c^2$;

б) $a^{2k}+b^{2n}+c^{2m}$.

3. Докажите, что если существуют такие натуральные числа m и k, что
$A=12^{4k+3}-11^m<200$,
то число A — простое.

С. Охитин (г. Оренбург)

4. Известно, что для данного n любой набор из k натуральных различных чисел, ни одно из которых не больше n, содержит хотя бы три таких элемента, что существует треугольник со сторонами, длины которых выражаются этими числами.

Какое наименьшее значение может принять k как функция от n?

О. Беридзе (г. Батуми)

5. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и T такие, что

$$\frac{|AM|}{|MB|}=m,\quad \frac{|BN|}{|NC|}=n,$$

$$\frac{|CT|}{|TA|}=t.$$

Известно, что прямые MN и BT пересекаются в точке O. Найти отношение $|BO|:|OT|$.

Г. Сверчков (г. Москва)

Ю. Ионин, Л. Курляндчик

Поиск инварианта

В этой статье рассматриваются задачи, сходные по формулировке. В каждой из них идет речь о некоторой совокупности чисел или знаков, и указаны операции, которые можно над ними производить. Читатель, внимательно проработавший статью, обнаружит не только внешнее сходство встречающихся в ней задач и упражнений, но и общую идею, на которой основано их решение.

З а д а ч а 1. *На доске написано десять плюсов и пятнадцать минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения двадцати четырех таких операций?*

Р е ш е н и е. Заменим каждый плюс числом 1, а каждый минус числом —1. Разрешенная операция описывается тогда так: стираются любые два числа и записывается их произведение. Поэтому произведение всех написанных на доске чисел остается неизменным. Так как вначале это произведение равнялось —1, то и в конце останется число —1, то есть знак минус.

Это рассуждение можно было провести иначе. Заменим все плюсы нулями, а минусы — единицами, и заметим, что сумма двух стираемых чисел имеет ту же четность, что и число, записываемое вместо них. Так как сначала сумма всех чисел была нечетной (она равнялась 15), то и последнее оставшееся на доске число будет нечетным, то есть единицей, и, значит, на доске останется минус.

Наконец, третье решение задачи можно получить, заметив, что в результате каждой операции число минусов либо не изменяется, либо уменьшается на два. Поскольку сначала число минусов было нечетным, то и в конце останется один минус.

Проанализируем все три решения. Первое решение основывалось на неизменяемости произведения написанных чисел, второе — на неизменяемости четности их суммы и третье — на неизменяемости четности числа минусов. В математике вместо слова *«неизменяемость»* употребляют термин *«инвариантность»*. Можно сказать, что в каждом решении нам удалось найти *инвариант*: произведение написанных чисел, четность суммы, четность числа минусов. Решение последующих задач и упражнений также основывается на удачном подборе инварианта.

У п р а ж н е н и е 1. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они различны, и минус в противном случае. Докажите, что последний оставшийся на доске знак не зависит от порядка, в котором производились стирания.

З а д а ч а 2. *В таблице* 4×4 *знаки «+» и «—» расставлены так, как показано на рисунке* 1. *Разрешается изменить знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или вдоль прямой, параллельной какой-нибудь из диагоналей (в частности, в любой угловой клетке). Можно ли с помощью этих операций получить таблицу, не содержащую ни одного минуса?*

Р е ш е н и е. Заменим плюсы и минусы числами 1 и —1. В качестве инварианта можно взять произведение чисел, находящихся в клетках, кото-

+	+	−	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 1.

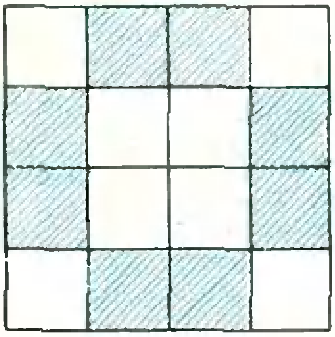


Рис. 2.

+	+	−	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

Рис. 3.

рые заштрихованы на рисунке 2, поскольку оно в результате разрешенной операции все время сохраняет первоначальное значение, равное —1. Но, значит, среди заштрихованных чисел всегда будет оставаться — 1, следовательно, получить таблицу, не содержащую ни одного минуса, нельзя.

Упражнение 2. Решите задачу 2 для таблиц, изображенных на рисунках 3—5.

Задача 3*). *На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вместо них написать одну цифру, отличную от стертых (2 вместо* 0 *и* 1, 1 *вместо* 0 *и* 2, 0 *вместо* 1 *и* 2). *Докажите, что если в результате нескольких таких операций на доске останется одна-единственная цифра, то она не зависит от порядка, в котором производились стирания.*

---

*) Это — задача М338 из «Задачника «Кванта», см. «Квант», 1975, № 8.

Решение. Обозначим через x_0, x_1, x_2 число нулей, единиц и двоек соответственно. Выполнив *один* раз разрешенную операцию, мы изменим каждое из этих чисел на 1 и, следовательно, изменим четность всех трех чисел. Когда на доске остается одна цифра, два из чисел x_0, x_1, x_2 становятся равными нулю, а третье — единице. Значит, с самого начала два из этих чисел имеют одну четность, а третье — другую. Поэтому независимо от того, в каком порядке производятся стирания, в конце единице может равняться лишь одно из чисел x_0, x_1, x_2, которое с самого начала имело не ту четность, что два других.

Из приведенного решения видно, что если числа x_0, x_1, x_2 имеют одну и ту же четность, то мы не сможем добиться, чтобы на доске осталась одна-единственная цифра. Докажите, что если среди чисел x_0, x_1, x_2 есть как четные, так и нечетные, и, кроме того, хотя бы два из них отличны от нуля, то существует такой порядок

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	−	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	−	+	+

Рис. 4.

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	−	−	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	−	−	+	+

Рис. 5.

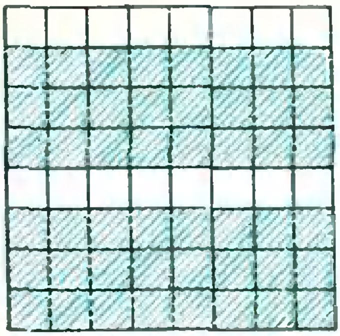


Рис. 6.

стираний, что в результате на доске останется одна цифра.

Изменим условие задачи 3: потребуем, чтобы одни и те же две неравные цифры стирались два раза, а вместо них записывалась одна цифра, отличная от стертых. Предположим, что снова после некоторого числа операций на доске осталась одна-единственная цифра. Можно ли заранее, по числу нулей, единиц и двоек, предвидеть, какая это цифра?

Рассуждение с четностью здесь не помогает, ибо в результате выполнения каждой операции одно из чисел x_0, x_1, x_2 меняет свою четность, а два других сохраняют четность, так что числа, имевшие разную четность, могут теперь получить одну и ту же четность. Однако можно заметить, что остатки от деления чисел x_0, x_1, x_2 на 3 изменяются каждый раз таким образом, что равные остатки остаются равными, а неравные остаются неравными. Дальнейшие рассуждения повторяют решение задачи 3.

З а д а ч а 4. *В каждой клетке таблицы 8×8 написано некоторое целое число. Разрешается выбирать в таблице любой квадрат размерами 3×3 или 4×4 и увеличивать на единицу все стоящие в клетках выбранного квадрата числа. Всегда ли можно с помощью таких операций преобразовать исходную таблицу в таблицу, у которой все числа делятся на 3?*

Р е ш е н и е. Нет, не всегда. Найдем сумму чисел, написанных в заштрихованных на рисунке 6 клетках. Поскольку любой квадрат размерами 4×4 содержит 12 заштрихованных клеток, а квадрат размерами 3×3 — 6 или 9 таких клеток, то в результате описанной операции остаток от деления на 3 этой суммы (чисел, стоящих в заштрихованных клетках) не будет меняться. Поэтому, если с самого начала найденная сумма не делится на 3, то среди заштрихованных клеток все время будут сохраняться клетки, в которых написанные числа не кратны трем.

У п р а ж н е н и е 3. Из всякой ли таблицы можно в условиях задачи 4 получить таблицу, не содержащую четных чисел?

З а д а ч а 5. *Числа 1, 2, 3, ..., n расположены в некотором порядке. Разрешается менять местами любые два рядом стоящих числа. Докажите, что если проделать нечетное число таких операций, то наверняка получится отличное от первоначального расположение чисел 1, 2, 3, ..., n.*

Р е ш е н и е. Пусть a_1, a_2, ... a_n — произвольная *перестановка* из чисел 1, 2, 3, ..., n. Будем говорить, что числа a_i и a_j образуют в этой перестановке *инверсию*, если $i<j$, но $a_i>a_j$, то есть большее из этих чисел предшествует меньшему. Поменяв местами два соседних числа в перестановке, мы увеличим или уменьшим число инверсий на 1. Проделав же нечетное число таких операций, мы изменим четность числа инверсий, а значит, изменим и перестановку.

У п р а ж н е н и е 4 Докажите, что утверждение задачи 5 останется справедливым, если разрешить менять местами любые два числа в перестановке.

У к а з а н и е. Докажите, что любые два числа можно поменять местами, проделав нечетное число раз операцию, описанную в задаче 5.

Переход от одной перестановки чисел 1, 2, 3, ..., n к другой перестановке этих чисел, при котором какие-нибудь два числа меняются местами, а остальные остаются на месте, называется *транспозицией*. Результат упражнения 4 можно сформулировать так: *выполнив нечетное число транспозиций, мы изменим перестановку.*

З а д а ч а 6. *В различных пунктах кольцевого автодрома в одно и то же время в одном направлении стартовали 25 автомобилей. По правилам гонки автомобили могут обгонять друг друга, но при этом запрещен двойной обгон. Автомобили финишировали одновременно в тех же пунктах, что и стартовали. Докажите, что во время гонки было четное число обгонов.*

Р е ш е н и е. Окрасим один из автомобилей в желтый цвет, а остальным автомобилям присвоим номера

1, 2, 3, ..., 24 в том порядке, в каком они располагаются на старте за желтым автомобилем. В центре автодрома установим световое табло, на котором после каждого обгона будем указывать номера автомобилей в том порядке, в каком они следуют за желтым автомобилем. Тогда обгон, в котором не участвует желтый автомобиль, приводит к тому, что на световом табло меняются местами два соседних числа.

Посмотрим, что произойдет, если какой-нибудь автомобиль обгонит желтый. Если перед этим обгоном числа на табло образовывали перестановку $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{24}$, то после обгона они образуют перестановку $a_2, a_3, \ldots, a_{24}, a_1$. Заметим, что к такой же перестановке можно прийти, выполнив последовательно 23 транспозиции:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{24} \to a_2, a_1, a_3, \ldots, a_{24} \to a_2, a_3, a_1, \ldots, a_{24} \to \ldots \to a_2, a_3, \ldots, a_1, a_{24} \to a_2, a_3, \ldots, a_{24}, a_1.$$

Если же желтый автомобиль совершил обгон, то из перестановки $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{24}$ мы получим перестановку $a_{24}, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{23}$. Этот переход также можно заменить двадцатью тремя транспозициями.

Таким образом, л ю б о й обгон сводится к нечетному числу транспозиций. Если бы общее число обгонов было нечетным, то нечетным оказалось бы и общее число транспозиций. Остается воспользоваться результатом упражнения 4.

Упражнения

5. По окружности выписаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. В промежуток между двумя одинаковыми цифрами вписывается 1, а между разными 0, после чего все первоначальные цифры стираются. Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, получить набор из девяти нулей?

6. Петя разорвал листок бумаги на десять кусков, некоторые из этих кусков он снова разорвал на десять частей, и т. д. Мог ли Петя получить таким путем 1975 кусочков бумаги?

7. На доске написаны числа 1, 2, 3, . . ., 1975. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо стертых чисел остаток от деления суммы этих чисел на 13. После некоторого числа таких операций на доске осталось одно число. Каким оно может быть?

8. Каждое число от 1 до 1 000 000 заменяют числом, равным сумме его цифр. С получившимися числами проделывают ту же операцию, и так делают до тех пор, пока все числа не станут однозначными. Каких чисел в результате получится больше: единиц или двоек?

9. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С получившимся числом проделали то же самое, и так далее — сто раз. Какое в результате получится число?

10. Круг разбит на 10 секторов, в каждом из которых стоит по одной фишке. Одним ходом разрешается любые две фишки передвинуть в соседние секторы, но так, чтобы фишки двигались при этом в противоположных направлениях. Можно ли собрать все фишки в одном секторе?

11а). В вершине A_{12} правильного 12-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ поставлен минус, а в остальных вершинах — плюсы. Разрешается выбрать любые три вершины, образующие непрямоугольный равнобедренный треугольник, и изменить знаки, написанные в этих вершинах, на противоположные. Можно ли с помощью таких операций добиться, чтобы в вершине A_1 оказался минус, а в остальных вершинах — плюсы?

б). Сохранится ли результат упражнения а), если допустить перемену знака в вершинах любого равнобедренного треугольника, в том числе и прямоугольного? *).

12. В каждой клетке таблицы 4×4 написан плюс или минус. Разрешается одновременно менять знак на противоположный во всех клетках одной строки или одного столбца. Наименьшее число минусов, к которому можно прийти, начав с данной таблицы, называется *характеристикой* этой таблицы. Какие значения может принимать характеристика?

13. По кругу стоят 30 фишек — 10 белых и 20 черных. Разрешается менять местами любые две фишки, между которыми стоят еще три фишки. Два расположения фишек называются *эквивалентными*, если одно из них можно получить из другого, применив несколько раз указанную операцию. Сколько существует неэквивалентных расположений фишек?

14. Числа 1,2,3, . . . , 1975 записаны по порядку. Разрешается выбрать любые четыре числа и расставить их на тех местах, которые они занимали, но в обратном порядке. Можно ли с помощью таких операций прийти к расположению 1975, 1974, . . . , 3, 2, 1?

*) Эту задачу прислал в «Квант» ученик 10 класса школы № 3 г. Нахичевани *Вилаят Гусейнов*.

Задачник Кванта

Задачи

М366—М370; Ф378—Ф382

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 апреля 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М366, М367» или «... Ф378». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

М366. Можно ли расположить на плоскости несколько треугольников так, чтобы две вершины каждого из них лежали на сторонах (но не в вершинах) других треугольников?

В. Колосов

М367. Может ли произведение а) трех; б) четырех последовательных натуральных чисел равняться некоторой степени некоторого натурального числа (квадрату, кубу, и т. д.)?

Д. Флейшман, уч. 10 класса

М368. Докажите, что пересечение трех прямых круговых цилиндров радиуса 1, оси которых попарно взаимно перпендикулярны (но не обязательно пересекаются), содержатся в некотором шаре радиуса $\sqrt{3/2}$.

С. Фомин

М369*. Дан остроугольный треугольник ABC. H — точка пересечения его высот, γ — окружность с центром H, лежащая внутри этого треугольника. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, описанный около окружности γ и вписанный в треугольник ABC (так, что

$$A_1\in[BC],\ \ B_1\in[AC],\ \ C_1\in[AB]).$$

Д. Изаак

М370*. Пусть a, b, c — тройка положительных чисел. Образуем из нее новую тройку:

$$|a-b|,\ |b-c|,\ |c-a|,$$

затем из этой тройки по тому же правилу — следующую и т. д. Обязательно ли среди полученных таким образом чисел встретится 0, если исходные числа а) целые; б) действительные?

Ф378. Пассажиры самолета не испытывают неприятных ощущений, если только их вес в полете не увеличивается более чем вдвое. Какое максимальное ускорение в горизонтальном полете допускает это условие?

В. Смирнитский

Ф379. Внешний диаметр стеклянной капиллярной трубки существенно больше диаметра канала. По-

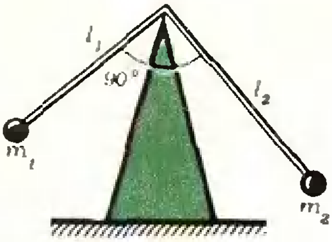


Рис. 1

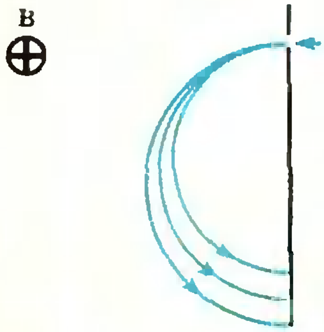


Рис. 2.

казатель преломления стекла $n=4/3$. Видимый через боковую поверхность трубки диаметр канала $d=2{,}66$ *мм*. Определить истинный диаметр канала.

Е. Кузнецов

Ф380. Найти период малых колебаний системы, изображенной на рисунке 1. Стержни считать невесомыми, их длины l_1 и l_2, массы шаров m_1 и m_2.

Ф381. В устройстве для определения изотопного состава (масс-спектрографе) однозарядные ионы калия с атомными весами $A_1=39$ и $A_2=41$ сначала ускоряются в электрическом поле, а затем попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное к направлению их движения (рис. 2). В процессе опыта из-за несовершенства аппаратуры ускоряющий потенциал меняется около среднего значения u_0 на величину $\pm\Delta u$. С какой относительной точностью $\frac{\Delta u}{u_0}$ нужно поддерживать значение ускоряющего потенциала, чтобы пучки изотопов калия не перекрывались?

С. Козел

Ф382. Найти радиус наибольшей капли воды, которая может испариться, не поглотив тепла извне.

Решения задач

М326—М329; Ф339—Ф342

М326. *Хорда окружности удалена от центра на расстояние h. В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, две другие — на хорде. Чему равняется разность длин сторон этих квадратов?*

Введем следующие обозначения (рис. 1): O — центр окружности, $|AB|=a$ — длина стороны большего квадрата, $|A'B'|=a'$ — длина стороны меньшего квадрата, $(OH)\perp(BB')$. Точки A, H и A' лежат на одной прямой. Опустим из точки O перпендикуляр на AA': $(OK)\perp(AA')$. Пусть

$$k=\frac{a}{|AH|}=\frac{a'}{|A'H|}=\frac{|KH|}{h}.$$

Тогда

$$a-a'=k(|AH|-|A'H|)=2k|KH|=2k^2h.$$

Из $\triangle ABH$:

$$|AB|^2+|BH|^2=|AH|^2,$$

т. е.

$$|AB|^2+\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2=|AH|^2,$$

или

$$k^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2=1,$$

откуда

$$k^2=\frac{4}{5},$$

и, значит, $a-a'=\dfrac{8}{5}h$.

Н. Васильев

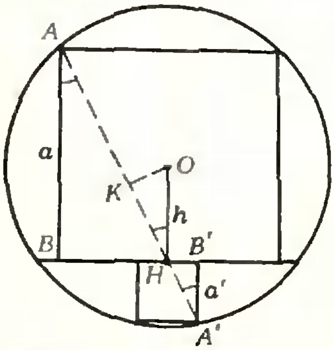


Рис. 1.

M327. *В компании N человек. Каждому из них нравится ровно k людей из этой компании. При каком наименьшем k можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой компании, которые нравятся друг другу?*

Обозначим членов компании точками на плоскости (никакие три из которых не лежат на одной прямой). Тот факт, что A нравится B, будем обозначать отрезком со стрелкой, направленным от точки A к точке B. Тогда из каждой точки будет выходить ровно k стрелок, а всего kn стрелок. Нам нужно найти число k_0 — наименьшее значение k, при котором обязательно хоть на одном отрезке будут поставлены стрелки в обе стороны.

Всего существует $\frac{n(n-1)}{2}$ отрезков без стрелок, соединяющих n точек. Если на каждом отрезке не более одной стрелки, то стрелок не больше, чем $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит, если $kn > \frac{n(n-1)}{2}$, то $k \geq k_0$. Отсюда

$$k_0 \leqslant \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases} \qquad (1)$$

Докажем, что неравенство (1) можно заменить на равенство. Поставим в формуле (1) знак равенства и покажем, что n точек при любом n можно так соединить отрезками со стрелками, что из каждой выходит ровно $k_0 - 1$ стрелок, и ни на одном отрезке нет двух стрелок. Вот один из способов сделать это. Надо n точек расположить в вершинах правильного n-угольника и из каждой точки направить стрелки в $k_0 - 1$ вершин, следующих за ней по часовой стрелке. Поскольку $k_0 - 1 < \frac{n}{2}$ при всех n, то никакие две стрелки не окажутся на одном отрезке.

А. Колодин, А. Тоом

◆

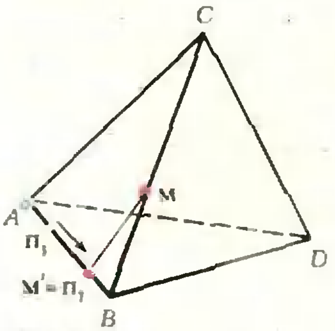


Рис. 2.

M328. *По правильному тетраэдру ползают муха и два паука. Муха ползает только по ребрам, а пауки — по всей поверхности. Максимальная скорость мухи в 2 раза больше максимальной скорости пауков.*

а) Докажите, что при любом начальном расположении пауки могут поймать муху.

б) Верно ли это, если максимальная скорость мухи больше чем в 2 раза превосходит максимальную скорость пауков?

в) Как изменится ответ, если разрешить паукам ползать только по ребрам тетраэдра? по всему объему тетраэдра? (Муха по-прежнему движется только по ребрам.)

Обозначим максимальную скорость пауков и мухи соответственно через $v_{п_{max}}$ и $v_{м_{max}}$. Докажем, что, независимо от того, как разрешено двигаться паукам (по ребрам, граням, или же по всему объему тетраэдра), верны следующие два утверждения.

1°. Если $v_{м_{max}} \leqslant 2v_{п_{max}}$, то пауки могут поймать муху при любом начальном расположении.

2°. Если $v_{м_{max}} > 2v_{п_{max}}$, то при некоторых начальных расположениях пауки не смогут поймать муху.

Ясно, что утверждение 1° достаточно доказать в самом «плохом» для пауков случае — когда им разрешено двигаться лишь по ребрам тетраэдра; а утверждение 2°, наоборот, в самом «лучшем» для пауков случае, когда они ползают по всему объему тетраэдра.

Обозначим вершины тетраэдра буквами A, B, C, D, точки, где находятся мухи и пауки — M, $П_1$ и $П_2$ соответственно. Будем считать, что длина ребра тетраэдра равна 1, и что $v_{м_{max}} = 1$.

Докажем утверждение 1°, считая, что паукам разрешено двигаться только по ребрам тетраэдра.

Обозначим проекцию точки M на ребро AB через M' (если M находится на ребре, перпендикулярном ребру AB, то M' совпадает с серединой ребра AB).

Стратегия пауков, обеспечивающая поимку мухи, может быть следующей.

Паук $П_1$ занимает вершину A и движется по ребру AB, пока не достигнет точки M' (это обязательно когда-нибудь

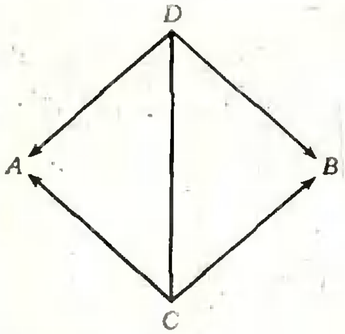


Рис. 3,а.

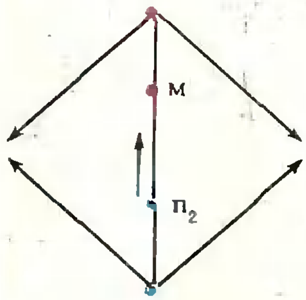


Рис. 3,б.

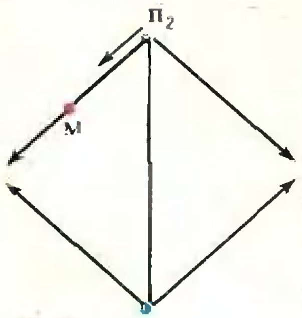


Рис. 3,в.

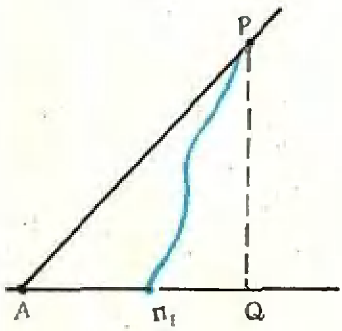


Рис. 4.

произойдет, так как M' не может выйти за точку B — см. рисунок 2). Затем $П_1$ движется по ребру AB так, чтобы все время оставаться в точке M': он может это сделать, если муха не на ребре AB, поскольку $v_{M'} = v_M \cdot \cos\alpha$, где α — угол между ребром AB и ребром, по которому движется муха, а для любого из ребер, кроме ребра AB, $\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ (точнее, $\cos\alpha$ равен либо $^1/_2$, либо нулю). Но на ребро AB муха попасть не сможет, так как для этого ей придется пройти либо через вершину A, либо через вершину B, где она будет поймана пауком $П_1$ ввиду условия $П_1 = M'$.

Итак, муха не может пройти через точки A и B: доступная ей область изображена на рисунке 3, а.

Как видно из рисунков 3, б и в, паук $П_2$ теперь легко может поймать муху, двигаясь все время к ней и сужая доступную ей область. Утверждение 1° доказано.

Перейдем к утверждению 2° (теперь мы считаем, что паукам разрешено двигаться по всему объему тетраэдра). Оно непосредственно следует из следующей леммы:

Если в момент времени t муха не поймана и находится в вершине тетраэдра, то за время 1 она может переползти в другую вершину тетраэдра (т. е. в интервале времени от t до $t+1$ пауки не смогут поймать муху).

Докажем эту лемму. Пусть муха находится в вершине A. Соединим точки $П_1$ и $П_2$, в которых сидят пауки, с этой вершиной; получим отрезки $П_1A$ и $П_2A$. Докажем, что найдется ребро тетраэдра, исходящее из точки A, которое образует с каждым из отрезков $П_1A$ и $П_2A$ углы, не меньшие 30°. В самом деле, если бы такого ребра не оказалось, то один из отрезков, например, отрезок $П_1A$, образовывал бы угол меньше 30° по крайней мере с двумя ребрами, исходящими из A, например, с AB и с AC. Но тогда для плоских углов трехгранного угла $ABCП_1$ было бы $\widehat{BAC} = 60°$, $\widehat{BAП_1} < 30°$, $\widehat{CAП_1} < 30°$, что невозможно (должно быть $\widehat{BAП_1} + \widehat{CAП_1} \geqslant \widehat{BAC}$).

Чтобы не быть пойманной, муха должна с максимальной скоростью двигаться по ребру, образующему с отрезками $П_1A$ и $П_2A$ углы, не меньшие 30°. Через единицу времени она доползет до другого конца этого ребра. Докажем, что на выбранном ребре пауки не смогут поймать муху. Действительно, пусть какой-нибудь паук, например $П_1$, поймал муху в момент времени $t + \Delta t$ в точке P (принадлежащей выбранному ребру; см. рисунок 4), тогда

$$|AP| = \Delta t \cdot v_{M_{max}} = \Delta t$$
$$(v_{M_{max}} = 1),$$
$$|П_1P| \leqslant \Delta t \cdot v_{П_{max}} < {}^1/_2\Delta t = {}^1/_2\,|AP|$$
$$(v_{П_{max}} < {}^1/_2\, v_{M_{max}}).$$

Опустим перпендикуляр PQ на $П_1A$; получим

$$|П_1P| \geqslant |PQ| = |AP| \cdot \sin(\widehat{П_1AP}) \geqslant \frac{1}{2}|AP|,$$

поскольку $\widehat{П_1AP} \geqslant 30°$ в силу выбора ребра.

Итак, с одной стороны $|П_1P| \geqslant \frac{1}{2}|AP|$, а с другой $|П_1P| < \frac{1}{2}|AP|$ — противоречие; следовательно, пауки не смогут поймать муху в интервале времени от t до $t+1$, и она доползет до другой вершины тетраэдра. Лемма, а значит, и утверждение 2° доказаны.

А. Ходулев

М329. *Выпуклый n-угольник помещен в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдется три вершины A, B, C этого n-угольника такие, что площадь треугольника ABC меньше $8/n^2$.*

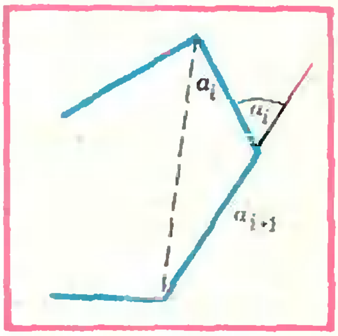


Рис. 5.

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ длины сторон нашего n-угольника, через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — величины его внешних углов. Пусть S_i — площадь i-ого треугольника (со сторонами a_i и a_{i+1} — см. рисунок 5, $i = 1, 2, \ldots, n-1$), S_n — площадь треугольника со сторонами a_n, a_1. Имеем: $2S_i = a_i a_{i+1} \sin\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $2S_n = a_n a_1 \sin\alpha_n$. Пусть S — наименьшая из площадей этих треугольников. Тогда

$$2S \leqslant a_i a_{i+1} \sin\alpha_i,$$

откуда

$$(2S)^n \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^2 \prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i < \prod_{i=1}^{n} a_i^2 {}^{*)},$$

то есть

$$2S < \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{2/n}.$$

Но

$$\left(\prod_i a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}{}^{**)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n},$$

поэтому

$$2S < \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^2.$$

Пусть p_i и q_i — длины проекций i-й стороны n-угольника на вертикальную и горизонтальную стороны квадрата. Тогда $a_i \leqslant p_i + q_i$, то есть $\sum_i a_i \leqslant \sum_i p_i + \sum_i q_i \leqslant 4$.

Поэтому

$$2S < \left(\frac{4}{n}\right)^2,$$

откуда

$$S < \frac{8}{n^2}.$$

Получившаяся оценка довольно груба — мы с самого начала отбросили $\prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i$, оценив это произведение единицей. Уточним эту оценку. Имеем:

$$(2S)^n \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i,$$

то есть

$$2S \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{2/n} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{16}{n^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i}{n}.$$

---

*) Здесь $\prod_i$ — знак произведения: $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$.

**) Мы воспользовались неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

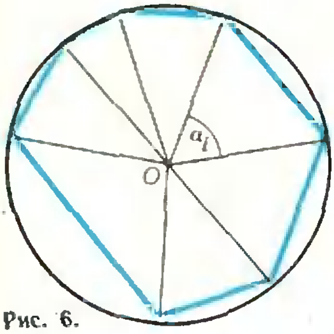


Рис. 6.

Так как $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$ (как сумма внешних углов n-угольника), то мы можем интерпретировать $\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i$ как удвоенную площадь вписанного в единичную окружность n-угольника с углами α_i при вершине O — центре окружности (рис. 6). Поэтому $\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i < 2\pi$, и, значит,

$$S \leqslant \frac{16\pi}{n^3}.$$

А. Клячко

◆

Ф339. *Теннисный мяч попадает на тяжелую ракетку и упруго отражается от нее. Масса мяча много меньше ракетки, а скорость мяча до столкновения с ракеткой равна* $\mathbf{v}$ *и составляет угол* $\alpha=60°$ *с перпендикуляром к ракетке. С какой постоянной скоростью должна поступательно двигаться ракетка для того, чтобы мяч отразился от нее под прямым углом к направлению первоначального движения? Как до, так и после столкновения с ракеткой мяч не вращается.*

При упругом столкновении мяча с неподвижной ракеткой скорость мяча не меняется по абсолютной величине, но меняет направление. При этом составляющая скорости $\mathbf{v}_y$ (рис. 7, *а*) остается постоянной ($\mathbf{v}'_y = \mathbf{v}_y$), а составляющая $\mathbf{v}_x$ меняет направление на противоположное ($\mathbf{v}'_x = -\mathbf{v}_x$).

По условию задачи скорость ракетки должна быть такой, чтобы мяч отражался под углом $\beta = 30°$ (для неподвижного наблюдателя), т. е. должно выполняться условие (см. рис. 7, *б*).

$$\frac{|\mathbf{v}'_y|}{|\mathbf{v}'_x|} = \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad (*)$$

Посмотрим, как меняется скорость мяча при столкновении с движущейся ракеткой. Для этого рассмотрим движение в системе координат, связанной с ракеткой, движущейся относительно неподвижной системы координат с постоянной скоростью $\mathbf{w}$ (так как масса ракетки много больше массы мяча, скорость ракетки после столкновения практически не меняется). Поскольку эта система инерциальная, отражение происходит по закону «угол падения равен углу отражения». Скорость мяча в этой системе до столкновения равна $\mathbf{u}=\mathbf{v}-\mathbf{w}$ (см. рис. 7, *в*). Составляющие скорости $\mathbf{u}_x$ и $\mathbf{u}_y$ равны соответственно $\mathbf{u}_x = \mathbf{v}_x - \mathbf{w}$, $\mathbf{u}_y = \mathbf{v}_y$. При столкновении составляющая $\mathbf{u}_y$ остается постоянной ($\mathbf{u}'_y = \mathbf{u}_y = \mathbf{v}_y$), а составляющая $\mathbf{u}_x$ меняет направление на противоположное: $\mathbf{u}'_x = -\mathbf{u}_x = -\mathbf{v}_x + \mathbf{w}$.

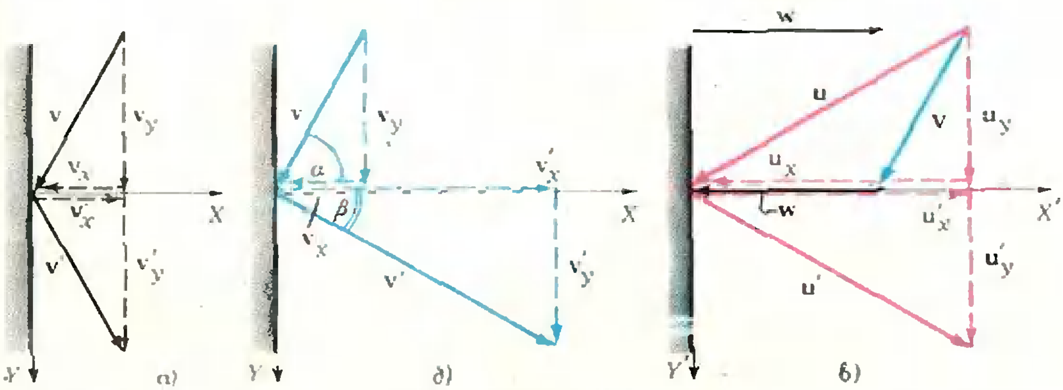


Рис. 7.

В неподвижной системе координат скорость мяча после столкновения равна $\mathbf{v}' = \mathbf{u}' + \mathbf{w}$, причем составляющие $\mathbf{v}'_y$ и $\mathbf{v}'_x$ равны $\mathbf{v}'_y = \mathbf{v}_y$, $\mathbf{v}'_x = \mathbf{u}'_x + \mathbf{w} = -\mathbf{v}_x + 2\mathbf{w}$.

Учитывая, что $|\mathbf{v}_y| = |\mathbf{v}| \sin\alpha$, $|\mathbf{v}_x| = |\mathbf{v}|\cos\alpha$, из условия (*)

$$\frac{v \sin\alpha}{v\cos\alpha + 2w} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

найдем $\mathbf{w}$:

$$w = \frac{\sqrt{3}\, v \sin\alpha - v\cos\alpha}{2} = \frac{v}{2}, \qquad \mathbf{w} = -\frac{\mathbf{v}}{2}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф340. *Спутник Земли массой $m = 10$ кг, движущийся по круговой орбите в высоких слоях атмосферы, испытывает сопротивление разреженного воздуха. Сила сопротивления $F = 5\cdot10^{-4}$ н. Определить, на сколько изменится скорость спутника за один оборот вокруг Земли. Высоту полета спутника над поверхностью Земли считать малой по сравнению с радиусом Земли.*

Полная энергия E спутника массой m, движущегося по орбите радиуса R, складывается из его кинетической энергии $K = \frac{mv^2}{2} = \gamma\frac{mM}{2R}$ (скорость спутника на круговой околоземной орбите равна $\sqrt{\gamma\frac{M}{R}}$, где R — радиус Земли) и потенциальной энергии $П = -\gamma\frac{mM}{R}$ (знак «минус» обусловлен характером сил притяжения между спутником и Землей: по мере сближения тел потенциальная энергия уменьшается). Таким образом,

$$E = K + П = -\gamma\frac{mM}{2R}.$$

В результате действия силы сопротивления энергия спутника меняется, следовательно, меняется радиус орбиты. Подсчитаем изменение радиуса за один оборот.

Энергия спутника за один оборот изменяется на величину ΔE, численно равную работе силы сопротивления на пути $2\pi R$, то есть $\Delta E = -2\pi RF$. Таким образом,

$$\Delta E = -\gamma\frac{mM}{2(R+\Delta R)} + \gamma\frac{mM}{2R} = \gamma\frac{mM}{2}\,\frac{\Delta R}{(R+\Delta R)R}.$$

Предполагая, что $|\Delta R| \ll R$, можем записать

$$\gamma\frac{mM}{2}\,\frac{\Delta R}{R^2} = -2\pi RF.$$

Учитывая, что $\gamma\frac{M}{R^2} = g$, окончательно получим

$$\Delta R = -\frac{4\pi RF}{gm} \approx -4\cdot10^2 \text{ м}$$

$$(g = 9{,}8 \text{ м/сек}^2, \quad R \approx 6{,}4\cdot10^6 \text{ м}).$$

Видно, что сделанное нами предположение $|\Delta R| \ll R$ справедливо.

Итак, в результате действия силы сопротивления радиус орбиты спутника уменьшился. Следовательно, скорость спутника увеличилась. Найдем изменение скорости.

Кинетическая энергия спутника на орбите радиуса $R + \Delta R$ равна

$$K_{R+\Delta R} = \frac{m(v+\Delta v)^2}{2} = \gamma\frac{mM}{2(R+\Delta R)}.$$

Изменение кинетической энергии

$$\Delta K = \frac{m}{2}[(v+\Delta v)^2 - v^2] =$$

$$= \frac{m}{2}[2v\,\Delta v + (\Delta v)^2] = -\gamma\frac{mM}{2}\frac{\Delta R}{(R+\Delta R)R}.$$

Предположив, что $\Delta v \ll v$ и учитывая, что $|\Delta R| \ll R$, можем записать:

$$2v\,\Delta v \approx -\gamma M\frac{\Delta R}{R^2},$$

откуда

$$\Delta v = -\gamma\frac{M}{2vR}\frac{\Delta R}{R}.$$

Учитывая, что $v = \sqrt{\gamma\frac{M}{R}} \approx 8\cdot10^3$ *м/сек* (первая космическая скорость), окончательно получим

$$\Delta v = -\frac{v}{2}\frac{\Delta R}{R} \approx 0{,}25 \text{ м/сек}.$$

◆

Ф341. *В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельной проводимостью σ. Жидкость движется с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией B, направленной перпендикулярно к скорости жидкости и параллельно плоскости пластин. Какая мощность выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление R?*

Находящийся в магнитном поле конденсатор, заполненный проводящей жидкостью, представляет собой источник тока. Найдем э. д. с. и внутреннее сопротивление этого источника.

На свободные заряды проводящей жидкости, движущиеся со скоростью v, в магнитном поле действует сила Лоренца $F_Л = qvB$, искривляющая траектории зарядов. В результате заряды оседают на пластинах конденсатора. Если конденсатор не замкнут на внешнее сопротивление, процесс зарядки продолжается до тех пор, пока сила, действующая на заряды со стороны возникающего электрического поля, не уравновесит силу Лоренца. Из этого условия найдем напряженность электрического поля в конденсаторе не замкнутом на внешнее сопротивление:

$$F_{эл} = F_Л, \text{ или } Eq = qvB \longrightarrow E = vB.$$

Следовательно, разность потенциалов между пластинами не замкнутого конденсатора, (э. д. с.) равна $\mathscr{E} = vBd$.

Внутреннее сопротивление конденсатора равно сопротивлению проводящей жидкости между обкладками: $r = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{S}$.

При подключении к конденсатору внешнего сопротивления R по цепи идет ток $I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}$. При этом на сопротивлении R выделяется мощность

$$N = I^2R = \frac{(vBd)^2R}{\left(R+\frac{1}{\sigma}\frac{d}{S}\right)^2}.$$

Обратим внимание на парадоксальность полученного результата. Джоулево тепло в цепи выделяется за счет работы сторонних сил, то есть за счет работы силы Лоренца. Но ведь сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости заряда, следовательно, работы совершать не может. Как разрешить этот парадокс? За счет какого источника энергии выделяется джоулево тепло? Пожалуй, разбор этого вопроса интереснее и полезнее, чем решение первоначальной задачи.

Парадокс этот легко разрешить, если принять во внимание, что при замыкании цепи у свободных зарядов проводящей жидкости появляется составляющая скорости, направленная перпендикулярно пластинам. Следовательно, появляется составляющая силы Лоренца, направленная против скорости **v**. Так что полная работа силы Лоренца складывается из работ двух ее составляющих. И эта суммарная работа равна нулю. Убедимся в этом.

Перемещение заряда внутри конденсатора от одной пластины к другой происходит за счет действия составляющей силы Лоренца, перпендикулярной пластинам. Значение этой составляющей

$$F_1 = qvB.$$

Работа, совершаемая силой F_1 за единицу времени (т. е. мощность), равна

$$N_1 = F_1 v_1 = qvBv_1,$$

где v_1 — составляющая скорости заряда, направленная перпендикулярно пластинам.

Составляющая силы Лоренца, направленная против скорости **v**, равна по величине

$$F_2 = qv_1B.$$

Работа, совершаемая этой силой за единицу времени,

$$N_2 = -F_2v_1 = -qv_1Bv$$

(сила F_2 действует как тормозящая сила, и потому совершаемая ею работа отрицательна).

Таким образом, работа силы Лоренца (если учесть все составляющие силы) действительно оказывается равной нулю:

$$N_1 + N_2 = 0.$$

Источником энергии в данной схеме, очевидно, является насос, прогоняющий жидкость через конденсатор. Этот насос должен постоянно совершать работу, так как на жидкость действует сила сопротивления, и вся эта работа в конечном счете переходит в тепло, выделяющееся в цепи.

С. Козел

◆

Ф342. *Найти заряд конденсатора 2 (рис. 8), если $C_1=C_2=C_3=C$, э. д. с. источника $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление источника r.*

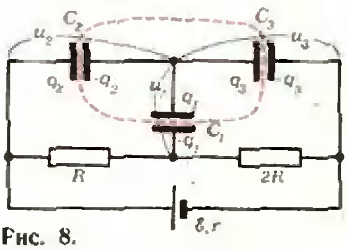


Рис. 8.

По замкнутой цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивлений R и $2R$ и источника с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, идет ток $I = \dfrac{\mathscr{E}}{3R+r}$.

Пусть падение напряжения на конденсаторах U_1, U_2, U_3, а их заряды соответственно q_1, q_2, q_3 (см. рис. 8). Сумма падений напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 равна падению напряжения на сопротивлении R, т. е.

$$U_1 + U_2 = IR. \qquad (1)$$

Сумма падений напряжения на конденсаторах C_2 и C_3 равна сумме падений напряжения на сопротивлениях R и $2R$:

$$U_2 + U_3 = 3IR. \qquad (2)$$

Суммарный заряд выделенной на рисунке части схемы равен нулю, т. е. $q_1 - q_2 + q_3 = 0$, или

$$CU_1 - CU_2 + CU_3 = 0. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) — (3), найдем

$$U_2 = \frac{4}{3} IR = \frac{4}{3}\,\frac{\mathscr{E}R}{3R+r}.$$

Следовательно, заряд конденсатора 2 равен

$$q_2 = C_2U_2 = \frac{4}{3}\,\frac{C\mathscr{E}R}{3R+r}.$$

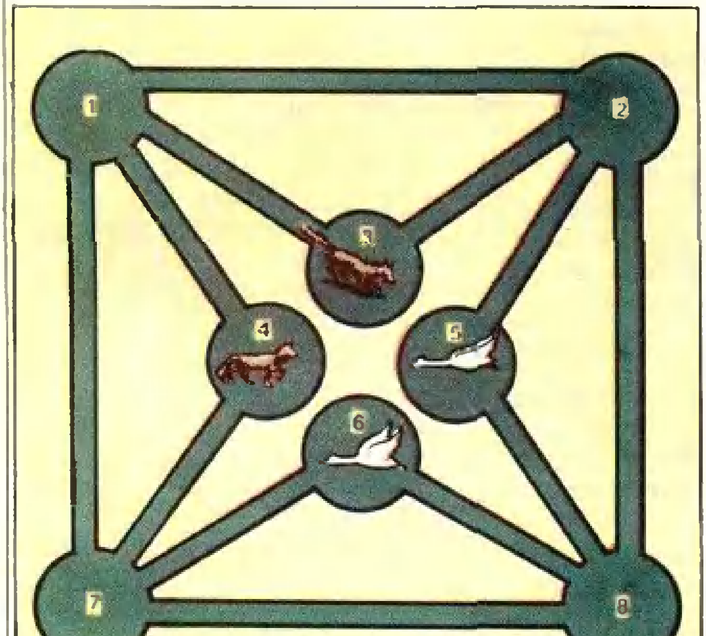
И. Слободецкий

Головоломки Сэма Лойда

«Крокет»

Юная леди, которую вы здесь видите, задумалась, как наименьшим числом прямых ударов провести шар через все ворота, начиная с *A* и кончая *Z*.

Подскажите, как ей поступить.



«Лиса и гусь»

За сколько ходов вы сможете поменять местами гусей и лисиц? В конечной позиции гуси должны находиться на полях 3 и 4, а лисы — на полях 5 и 6.

Передвигать фигурки начинайте с лисицы. Каждая фигурка за один ход передвигается на соседнее поле (кружок).

Я. Суконник, П. Горнштейн

Простой ответ в «сложной» задаче

В этой статье вновь поднимается вопрос о том, как следует решать планиметрические задачи — «алгебраически» или же «чисто геометрически»? *) Конечно же, было бы неразумно противопоставлять эти два метода, главная задача при подготовке к вступительным экзаменам — научиться их сочетать. Поиски «чисто геометрического» решения целесообразны далеко не всегда — только если оно приходит в голову достаточно быстро. Мы лишь хотим предостеречь будущего абитуриента от головоломных вычислений в сравнительно простой геометрической задаче, легко решающейся с помощью «чисто геометрической» идеи. Задачи, рассматриваемые в этой заметке, допускают разные, иногда очень громоздкие решения, хотя ответы всегда получаются простые. На их примерах можно легко убедиться, насколько важно уметь «геометрически» мыслить и применять в общем-то хорошо всем известные теоремы планиметрии. Конечно, чтобы найти простое геометрическое решение, нужно проявить изобретательность. Умение «решить задачу красиво» — это искусство, овладеть которым можно, лишь постоянно развивая свое геометрическое мышление и интуицию. А для этого — решайте как можно больше задач, и помните, что поиск решения — процесс творческий.

*) См. также статью С. В. Романова и И. Ф. Шарыгина «Алгебраический метод решения геометрических задач», «Квант», 1975, № 11.

Начнем с таких двух задач.

Задача 1 (МАИ, 1973). *В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен α. На отрезках гипотенузы, образуемых основанием опущенной на нее высоты, как на диаметрах, построены полуокружности, расположенные от гипотенузы по одну сторону с данным треугольником. Найти отношение длин отрезков катетов, заключенных внутри этих полуокружностей.*

Первое решение. Пусть CAB — данный треугольник (угол A — прямой), AD — его высота, точки E и F — точки пересечения полуокружностей с катетами AC и AB (см. рис. 1). Очевидно, что $(DE)\perp(AC)$ и $(DF)\perp(AB)$. Поэтому

$$\begin{cases} |DF|^2=|AF|\cdot|FB|, \\ |DE|^2=|AE|\cdot|EC|. \end{cases}$$

Введем неизвестные: $x=|DF|=|AE|$ и $y=|AF|=|DE|$. Тогда, обозначив $|AC|=b$ и $|AB|=c$, получим систему:

$$\begin{cases} x^2=y(c-y) \\ y^2=x(b-x), \end{cases}$$

откуда

$$x=\frac{bc^2}{b^2+c^2},\quad y=\frac{b^2c}{b^2+c^2}.$$

Но

$$|FB|=c-y=\frac{c^3}{b^2+c^2},$$

$$|EC|=b-x=\frac{b^3}{b^2+c^2}.$$

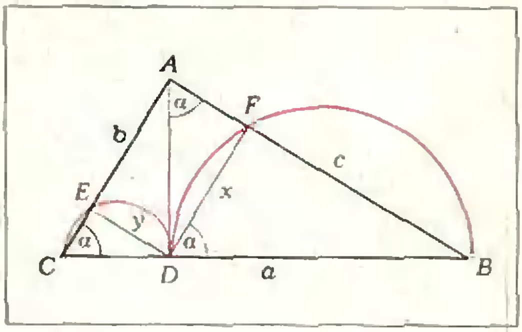


Рис. 1.

Следовательно,

$$\frac{|FB|}{|EC|}=\frac{c^3}{b^3}.$$

Но $\frac{c}{b}=\operatorname{tg}\alpha$, значит, $\frac{|FB|}{|EC|}=$ $=\operatorname{tg}^3\alpha$.

Второе решение. Заметим, что

$$\widehat{DCE}=\widehat{DAF}=\widehat{BDF}=x.$$

Поэтому

$$\frac{|FB|}{|EC|}=\frac{|DF|\cdot\operatorname{tg}\alpha}{|EC|}=\frac{(|AF|\cdot\operatorname{tg}\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{|EC|}=$$
$$=\frac{|DE|\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}{|EC|}=\operatorname{tg}^3\alpha.$$

Мы видим, что для получения ответа вовсе не нужно вводить никаких неизвестных и составлять алгебраические системы, — достаточно лишь заметить, что перечисленные три угла конгруэнтны.

Задача 2. *Дан треугольник ABC. Проведена окружность, касающаяся стороны BC в основании проведенной к ней высоты AD длины h и проходящая через середину стороны AC длины b. Найти диаметр этой окружности.*

Первое решение. На рисунке 2 показано одно из возможных расположений: диаметр DF окружности меньше высоты, окружность пересекает сторону AC в двух точках K и E, из которых верхняя точка E является серединой, и не пересекает второй стороны треугольника.

Обозначим диаметр искомой окружности через x: $|DF|=x$, а длину хорды KE — через y: $|KE|=y$.

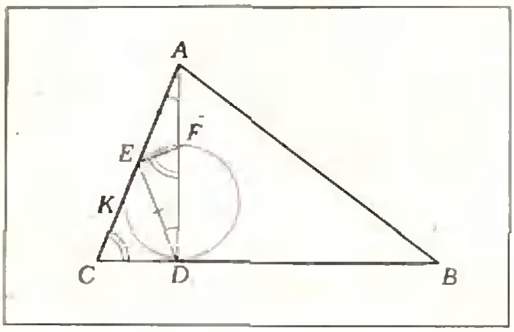


Рис. 2.

Применяя теоремы о касательной и секущей, а также о двух секущих, проведенных к окружности из одной точки (C и A соответственно), получаем

$$|CD|^2=|CK|\cdot|CE|,$$
$$|AF|\cdot|AD|=|AE|\cdot|AK|.$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} b^2-h^2=\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}-y\right),\\ h(h-x)=\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}+y\right).\end{cases}$$

Решая эту систему относительно x, находим $|DF|=x=\frac{b^2}{2h}$.

Однако это решение нельзя считать исчерпывающим — ведь остались неразобранными другие возможные положения окружности (например, когда $|DF|>|AD|$, и вторая точка пересечения находится на продолжении стороны AC). Разбор каждого из этих случаев приводит к разным системам и, более того, требует использования разных теорем (в случае $|DF|>|AD|$ понадобится теорема о двух пересекающихся хордах).

Сейчас мы приведем другое, геометрическое решение этой задачи; убедитесь сами, что оно уже не зависит от того, **как** окружность пересекает стороны данного треугольника.

Второе решение. Соединим точку E с точками D и F. Поскольку DE — медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника CAD, имеем: $|DE|=|AE|=$ $=\frac{b}{2}$, и $\widehat{EDF}=\widehat{EAD}$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Следовательно, прямоугольные треугольники DEF и ADC подобны. Отсюда

$$\frac{|DF|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|AD|},$$

или

$$|DF|=\frac{|AC|\cdot|DE|}{|AD|},$$

то есть

$$|DF|=\frac{b^2}{2h}.$$

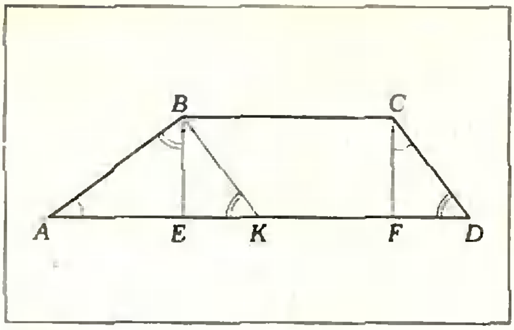


Рис. 3.

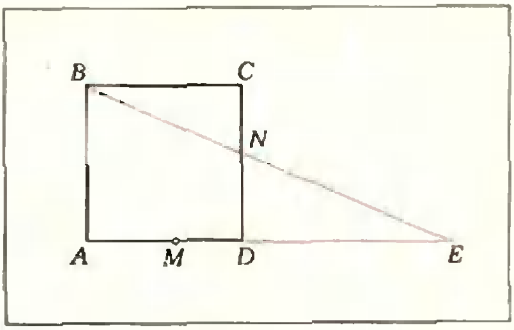


Рис. 4.

Часто решение геометрических задач алгебраическим методом приводит к сложным иррациональным уравнениям. Иногда благодаря дополнительным соображениям этого удается избежать. Вот две типичные задачи.

Задача 3 (ЛГУ, 1973). *Определить высоту трапеции, если длины ее оснований равны 6 и 11, длина одной из боковых сторон равна 4, а сумма углов при нижнем основании равна* $\frac{\pi}{2}$.

Первое решение. Проведем в трапеции $ABCD$ высоты BE и CF (рис. 3) и положим $|BE| = |CF| = x$. Будем считать, что $|AB| = 4$. Из прямоугольного треугольника AEB находим $|AE| = \sqrt{16-x^2}$. Поэтому

$$|FD| = |AD| - (|AE| + |EF|) = (|AD| - |BC|) - |AE| = 5 - \sqrt{16-x^2}.$$

Поскольку сумма углов при основании AD равна $\frac{\pi}{2}$, прямоугольные треугольники AEB и CFD подобны; следовательно,

$$\frac{|BE|}{|FD|} = \frac{|AE|}{|CF|}.$$

Получаем иррациональное уравнение

$$\frac{x}{5-\sqrt{16-x^2}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x},$$

из которого находим высоту трапеции:

$$x = |BE| = 2{,}4.$$

Второе решение. Сделаем дополнительное построение: проведем (BK) параллельно (CD). Получим (см. рис. 3 и условие задачи) прямоугольный треугольник ABK, из которого легко находится высота трапеции:

$$|BE| = \frac{|AB| \cdot |BK|}{|AK|} = \frac{|AB| \cdot \sqrt{|AK|^2 - |AB|^2}}{|AK|} = \frac{|AB| \cdot \sqrt{(|AD| - |BC|)^2 - |AB|^2}}{|AD| - |BC|} = \frac{4 \cdot \sqrt{(11-6)^2 - 16}}{11-6} = 2{,}4.$$

Задача 4. *На сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной 3 взяты две точки M и N так, что длина ломаной MDN равна стороне квадрата. Прямые AM и BN пересекаются в точке E. Найти длину отрезка ME, если $|NE| = 4$.*

Первое решение. Обозначим длину отрезка DN (рис. 4) через x. Тогда $|DE| = \sqrt{16-x^2}$. Из подобия треугольников NDE и BAE имеем

$$\frac{|DN|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AE|},$$

то есть

$$\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{3+\sqrt{16-x^2}}.$$

Это иррациональное уравнение сводится к такому уравнению четвертой степени

$$x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 96x - 144 = 0.$$

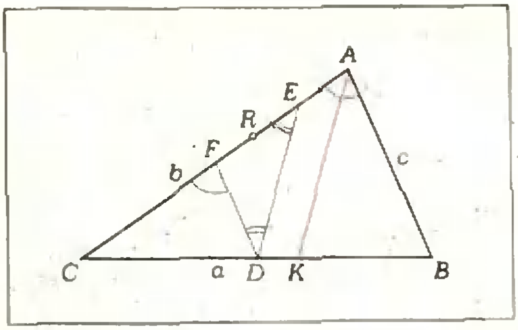


Рис. 5.

Многочлен, получившийся в левой части, раскладывается в произведение двух квадратных трехчленов: x^2+2x-6 и $x^2-8x+24$. Поэтому

$$(x^2+2x-6)(x^2-8x+24)=0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень:

$$x=|DN|=\sqrt{7}-1.$$

Теперь мы легко находим

$$|ME|=|MD|+|DE|=$$
$$=3-|DN|+\sqrt{16-|DN|^2}=$$
$$=3-\sqrt{7}+1+\sqrt{16-(\sqrt{7}-1)^2}=$$
$$=4-\sqrt{7}+\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}=5.$$

Простой ответ наводит на мысль, что существует другое, менее сложное решение. Вот оно.

Второе решение. Поскольку треугольники BCN и NDE подобны, то

$$\frac{|BC|}{|CN|}=\frac{|DE|}{|DN|},$$

или

$$\frac{3}{3-|DN|}=\frac{|DE|}{|DN|},$$

то есть
$3(|DE|-|DN|)-|DN|\cdot|DE|=0.$
Приняв во внимание, что $|MD|=3-|DN|$, и $|DN|^2+|DE|^2=16$, получим

$$|ME|=|MD|+|DE|=$$
$$=(3-|DN|)+|DE|=$$
$$=\sqrt{(3-|DN|+|DE|)^2}=$$
$$=\sqrt{9+16+2\cdot 0}=5.$$

Проявив изобретательность, мы смогли обойтись без иррационального уравнения, решать которое, согласитесь, было не так-то уж и приятно!

Одним из самых распространенных среди абитуриентов методов решения планиметрических задач является применение тригонометрии. Безусловно, это очень важный и полезный метод, — порой введение тригонометрических функций является естественным и оправданным путем к решению. Однако в каждом конкретном случае следует подумать, нет ли более простого, геометрического решения. Вот показательный пример.

Задача 5 (МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, 1971). *В треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB, а угол при вершине A равен α. На стороне AC взята точка R, так что $|AB|=|RC|$. Пусть E — середина отрезка AR, D — середина стороны BC. Найти угол CED.*

Первое решение (тригонометрическое). Обозначим длины сторон треугольника ABC буквами a, b, c, величины его углов — буквами A, B, C соответственно, а величину искомого угла CED — буквой x.

Тогда (см. рис. 5):

$$\widehat{CDE}=180^\circ-(C+x),$$
$$|CD|=\frac{a}{2},$$
$$|CE|=|CR|+|RE|=$$
$$=c+\frac{b-c}{2}=\frac{b+c}{2}.$$

По теореме синусов находим из треугольника CDE:

$$\frac{|CE|}{\sin\widehat{CDE}}=\frac{|CD|}{\sin\widehat{CED}},$$

то есть

$$\frac{b+c}{\sin(C+x)}=\frac{a}{\sin x}; \qquad (1)$$

из треугольника ABC:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

то есть

$$\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}. \qquad (2)$$

Деля соотношение (1) на соотношение (2), получаем

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin(C+x)}=\frac{\sin A}{\sin x},$$

или, поскольку $B=180°-(A+C)$,

$$\frac{\sin(A+C)+\sin C}{\sin A}=\frac{\sin(C+x)}{\sin x},$$

то есть

$$\frac{2\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin(C+x)}{\sin x},$$

откуда

$$x=\frac{A}{2}=\frac{\alpha}{2}.$$

Второе решение (геометрическое). Мы сейчас приведем даже два геометрических решения.

1°. Проведем в треугольнике ABC среднюю линию DF. Имеем

$$|FE|=|CE|-|CF|=\frac{b+c}{2}-\frac{b}{2}=\frac{c}{2}=|DF|,$$

то есть треугольник DFE — равнобедренный. Поэтому

$$\widehat{CED}=\frac{1}{2}\widehat{CFD}=\frac{1}{2}\widehat{CAB}=\frac{\alpha}{2}.$$

2°. Проведем биссектрису AK угла A треугольника ABC. Тогда $\frac{|CK|}{|CA|}=\frac{a}{b+c}$. Но и $\frac{|CD|}{|CE|}=\frac{a}{b+c}$, значит, треугольники CDE и CKA подобны, и отрезок DE параллелен AK.

Следовательно, $\widehat{CED}=\widehat{CAK}=\frac{\alpha}{2}$.

Не правда ли, «тригонометрическое» решение этой задачи нельзя назвать удачным? — оба геометрических решения, безусловно, более изящны. Но в некотором смысле они и более трудны — ведь нужно было догадаться сделать дополнительные построения — провести среднюю линию DF в первом случае и биссектрису AK — во втором.

Упражнения

1 (ЛГУ, 1973). В прямоугольнике $ABCD$ дано: $|AB|=a$, $|AD|=b$ $(a>b)$. Найти на стороне AB точку E, для которой $\angle CED \cong \angle AED$.

2 (НГУ, 1967). В плоском выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, K, L являются серединами сторон AB, BC, CD, DA. Отрезками EK и FL данный четырехугольник разделен на четыре меньших четырехугольника. Доказать, что сумма площадей тех из этих четырехугольников, которые имеют вершины в точках A и C, равна сумме площадей двух других четырехугольников.

3 (НГУ, 1974). В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна к основанию AD, $|BC|=a$, $|AD|=b$, $a<b$. На основании AD существует такая точка M, что (MB) перпендикулярна к (AC), а (MC) перпендикулярна к (BD). Найти высоту трапеции.

4 (МФТИ, 1970). Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $|AB|=a$, $|CD|=b$ $(a<b)$. Окружность, проходящая через вершины A, B и C, касается $[AD]$. Найти длину диагонали AC.

5 (МФТИ, 1973). Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти длину отрезка BC, если длина хорды AB равна a.

6 (МФТИ, 1973). В равнобочной трапеции $ABCD$ угол при основании AD равен $\arcsin\frac{24}{25}$. Окружность радиуса R касается основания AD, боковой стороны AB и проходит через вершину C; она отсекает на сторонах BC и CD конгруэнтные отрезки MC и NC соответственно. Найти длину отрезка BM.

7 (МГУ, биофак, 1973). В круге проведены два диаметра AB и CD, M — некоторая точка. Известно, что $|AM|=15$, $|BM|=20$ и $|CM|=24$. Чему равно $|DM|$?

8 (МГУ, геолог. фак., 1974). Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Угол CAB равен α. Биссектриса угла ABC пересекает катет AC в точке K. На стороне BC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке M. Найти угол AMK.

Г. Мякишев

Расчет цепей переменного тока с помощью векторных диаграмм

Расчет цепей переменного тока значительно сложнее, чем цепей постоянного тока. Однако в случае, если напряжение и сила тока изменяются по гармоническому закону, существует довольно простой и наглядный метод расчета цепей — метод векторных диаграмм. С ним мы и хотим познакомить читателей в этой статье.

Уравнение, описывающее вынужденные колебания в колебательном контуре

Промышленный переменный ток — это вынужденные электромагнитные колебания. Если напряжение $u = u(t)$ на концах цепи меняется по гармоническому закону

$$u = U_0 \cos \omega t, \qquad (1)$$

то сила тока i также меняется гармонически с той же частотой ω, но в общем случае ток сдвинут по фазе относительно напряжения на постоянную величину φ:

$$i = I_0 \cos (\omega t + \varphi). \qquad (2)$$

Впрочем, в первый момент после замыкания цепи колебания тока имеют гораздо более сложную форму. При замыкании электрическая цепь как бы получает «толчок», и если она обладает собственной частотой колебаний ω_0, то в ней возникают свободные электромагнитные колебания. Эти колебания накладываются на вынужденные колебания частоты ω, но постепенно затухают из-за наличия в цепи активного сопротивления R (на котором происходит выделение энергии в виде тепла). Лишь после того как свободные колебания затухнут, вынужденные колебания можно считать установившимися. Амплитуда силы тока I_0 в формуле (2) — это амплитуда установившихся колебаний. Все происходит точно так же, как и в случае вынужденных механических колебаний (более подробно об этом см., например, в статье Г. Я. Мякишева «Вынужденные механические колебания», «Квант», 1974, № 11).

Довольно простой, но очень важный частный случай представляют собой вынужденные колебания в цепи, состоящей из последовательно соединенных проводника с активным сопротивлением R, катушки индуктивности L и конденсатора емкости C (рис. 1). Такую цепь называют последовательным колебательным контуром. Пусть напряжение u на концах цепи меняется по закону, описываемому уравнением (1); тогда сила тока i в цепи меняется в соответствии с выражением (2). Чему равна амплитуда тока I_0 и сдвиг фаз φ?

Как известно, уравнение, описывающее вынужденные колебания тока в этом контуре, имеет следующий вид:

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t} + Ri + \frac{q}{C} = U_0 \cos \omega t. \qquad (3)$$

Здесь q — заряд конденсатора. (Это

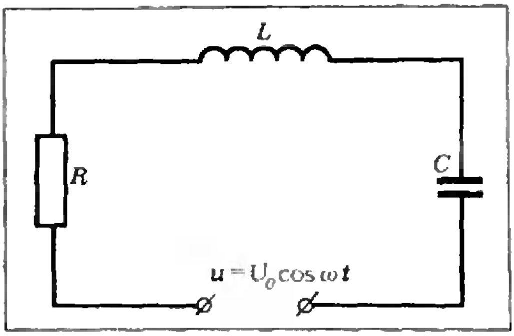


Рис. 1.

уравнение аналогично уравнению, описывающему вынужденные механические колебания, например, колебания груза на пружине.)

Уравнение (3) можно истолковать следующим образом. В любой момент времени полное напряжение ($u = U_0 \cos \omega t$) на концах цепи равно сумме напряжений на активном сопротивлении ($u_R = Ri$), на катушке индуктивности $\left(u_L = L\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)$ и на конденсаторе $\left(u_C = \frac{q}{C}\right)$:

$$u_L + u_R + u_C = u. \qquad (4)$$

Колебания всех трех напряжений происходят с одной и той же частотой, но имеют различные амплитуды и сдвинуты по фазе друг относительно друга.

Чтобы найти амплитуду колебаний силы тока и сдвиг фаз между током и напряжением, нужно уметь складывать гармонические колебания, сдвинутые по фазе. Для этого надо знать амплитуды напряжений u_R, u_L и u_C, а также сдвиги фаз этих напряжений относительно силы тока. Об этом и пойдет речь в следующих трех параграфах.

Напряжение на активном сопротивлении

Наиболее простой случай электрической цепи — это цепь, содержащая только активное сопротивление R. Для такой цепи основное уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$Ri = U_0 \cos \omega t. \qquad (5)$$

Отсюда

$$i = \frac{U_0}{R}\cos \omega t = I_0 \cos \omega t. \qquad (6)$$

Амплитуда напряжения связана с амплитудой силы тока соотношением

$$U_0 = I_0 R. \qquad (7)$$

Колебания силы тока и напряжения на активном сопротивлении совпадают по фазе. Заметим, что равенство (7) ничем не отличается от закона Ома для постоянного тока.

Напряжение на индуктивном сопротивлении

Пусть цепь состоит из катушки с индуктивностью L. Активным сопротивлением катушки пренебрежем. Вместо уравнения (3) будем иметь в этом случае более простое уравнение

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t} = U_0 \cos \omega t,$$

или

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{U_0}{L}\cos \omega t. \qquad (8)$$

Теперь скорость изменения силы тока $\left(\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)$ совершает гармонические колебания, совпадающие по фазе с колебаниями напряжения. Амплитуда этих колебаний равна $\frac{U_0}{L}$.

Для того чтобы найти выражение для силы тока, воспользуемся аналогией между электромагнитными колебаниями в контуре и механическими колебаниями груза на пружине. Как известно, сила тока i соответствует скорости колебаний груза v, а скорость изменения силы тока $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ соответствует ускорению груза a. Но колебания скорости отстают от колебаний ускорения на $\pi/2$, и амплитуда скорости v_0 связана с амплитудой ускорения a_0 соотношением $v_0 = a_0/\omega$. Это справедливо для гармонических колебаний любой природы. Поэтому если скорость изменения силы тока удовлетворяет уравнению (8), то сила тока изменяется со временем по закону

$$i = \frac{U_0}{L\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (9)$$

Амплитуда напряжения связана с амплитудой силы тока соотношением

$$U_0 = I_0 L\omega = I_0 R_L. \qquad (10)$$

Величину $R_L = L\omega$ называют индуктивным сопротивлением.

Итак, согласно выражениям (1) *и* (9) *сила тока на индуктивном сопротивлении отстает по фазе от напряжения на* $\pi/2$.

Напряжение на конденсаторе

Рассмотрим цепь, состоящую из конденсатора емкости C. Активным сопротивлением и индуктивностью цепи пренебрежем. Вынужденные колебания в этой цепи будут описываться уравнением

$$\frac{q}{C}=U_0\cos\omega t. \qquad (11)$$

Заряд конденсатора колеблется в фазе с напряжением, и амплитуда этих колебаний равна U_0C:

$$q=U_0C\cos\omega t. \qquad (12)$$

В случае электромагнитных колебаний заряд соответствует координате тела, совершающего механические колебания, а сила тока, представляющая собой скорость изменения заряда $\left(i=\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)$, аналогична скорости этого тела. Так как при любых гармонических колебаниях амплитуда скорости величины в ω раз больше амплитуды самой величины и скорость опережает величину по фазе на $\pi/2$, то в нашем случае

$$i=\frac{\Delta q}{\Delta t}=U_0C\omega\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=I_0\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (13)$$

Следовательно, сила тока опережает напряжение на конденсаторе на $\pi/2$, *или, что то же самое, напряжение отстает от силы тока на* $\pi/2$.

Амплитуда напряжения равна

$$U_0=\frac{I_0}{C\omega}=I_0R_C, \qquad (14)$$

где $R_C=\frac{1}{C\omega}$ — сопротивление конденсатора, называемое емкостным сопротивлением.

Сложение гармонических колебаний с помощью векторных диаграмм

Складывать гармонические колебания можно по-разному (аналитически, графически и т. д.). Однако в частном случае, когда частоты колебаний одинаковы, удобнее всего воспользоваться методом векторных диаграмм. В чем же состоит этот метод?

Из курса физики для 10-го класса известно, что проекция на любое направление вектора, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω, совершает гармоническое колебание. Если модуль вектора $\mathbf{x}_0$ равен x_0, то его проекция на ось OX равна $x=x_0\cos\varphi$ (рис. 2). При равномерном вращении вектора $\mathbf{x}_0$ угол φ меняется со временем по закону

$$\varphi=\omega t+\varphi_0,$$

где φ_0 — значение угла φ в начальный момент времени $t=0$. Следовательно, проекция вращающегося вектора колеблется по закону

$$x=x_0\cos(\omega t+\varphi_0). \qquad (15)$$

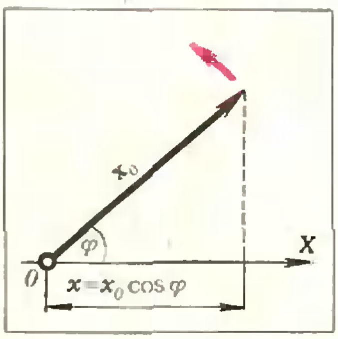


Рис. 2.

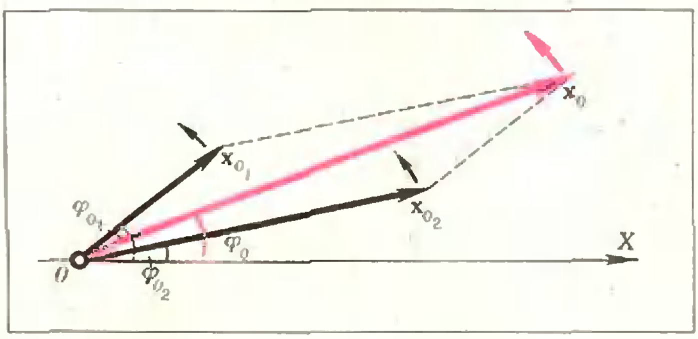


Рис. 3.

Рассмотрим теперь сложение двух гармонических колебаний, происходящих с одинаковыми частотами ω, но с различными амплитудами x_{0_1} и x_{0_2} и различными начальными фазами φ_{0_1} и φ_{0_2}:

$$x_1 = x_{0_1}\cos(\omega t + \varphi_{0_1}),$$
$$x_2 = x_{0_2}\cos(\omega t + \varphi_{0_2}).$$

Складываемые колебания в любой момент времени имеют разность фаз $\varphi = \varphi_{0_1} - \varphi_{0_2}$. Эти колебания можно представить как колебания проекций векторов $\mathbf{x}_{0_1}$ и $\mathbf{x}_{0_2}$, повернутых друг относительно друга на угол φ и вращающихся с угловой скоростью ω (рис. 3).

Сложив векторы $\mathbf{x}_{0_1}$ и $\mathbf{x}_{0_2}$, получим суммарный вектор $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0_1} + \mathbf{x}_{0_2}$. Проекция x этого вектора на направление OX тоже совершает гармоническое колебание. *Но проекция суммарного вектора равна сумме проекций складываемых векторов.* Следовательно,

$$x = x_1 + x_2 = x_0\cos(\omega t + \varphi_0), \quad (16)$$

где x_0 — амплитуда, а φ_0 — начальная фаза результирующего колебания. Величины x_0 и φ_0 можно найти, зная x_{0_1}, x_{0_2}, φ_{0_1} и φ_{0_2}. Нетрудно показать (см. рис. 3), что

$$x_0^2 = x_{0_1}^2 + x_{0_2}^2 + 2x_{0_1}x_{0_2}\cos(\varphi_{0_1} - \varphi_{0_2}),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{x_{0_1}\sin\varphi_{0_1} + x_{0_2}\sin\varphi_{0_2}}{x_{0_1}\cos\varphi_{0_1} + x_{0_2}\cos\varphi_{0_2}}.$$

Итак, каждое гармоническое колебание можно представить с помощью вектора, вращающегося с постоянной угловой скоростью, а сумму гармонических колебаний — с помощью результирующего (суммарного) вектора, вращающегося с той же скоростью. *Графическое изображение с помощью векторов значений гармонически изменяющихся величин и соотношений между ними и называют векторной диаграммой.*

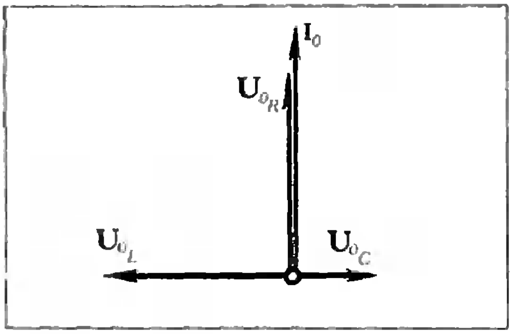


Рис. 4.

Векторная диаграмма последовательного колебательного контура

Вернемся снова к цепи, изображенной на рисунке 1, и построим для нее векторную диаграмму токов и напряжений. Это позволит нам определить амплитуду силы тока в цепи и сдвиг фаз между силой тока и приложенным напряжением.

Сила тока в данный момент времени одинакова во всех участках цепи*). Поэтому удобно построение векторной диаграммы начать с вектора $\mathbf{I}_0$, соответствующего силе тока. Его можно ориентировать произвольно. Для определенности изобразим вектор $\mathbf{I}_0$ вертикальной стрелкой (рис. 4).

Напряжение на активном сопротивлении совпадает по фазе с силой тока. Поэтому вектор $\mathbf{U}_{0_R}$, изображающий это напряжение, совпадает по направлению с вектором $\mathbf{I}_0$. Его модуль $U_{0_R} = I_0R$. Колебания напряжения на индуктивном сопротивлении опережают колебания силы тока на $\pi/2$, и соответствующий вектор $\mathbf{U}_{0_L}$ должен быть повернут относительно вектора $\mathbf{I}_0$ на $\pi/2$**). Его модуль $U_{0_L} = I_0L\omega$. И наконец, вектор $\mathbf{U}_{0_C}$, соответствующий напряжению на конденсаторе,

*) Ток, удовлетворяющий данному условию, называют квазистационарным. При частоте промышленного тока 50 *гц* его практически всегда можно считать квазистационарным.

**) Положительному сдвигу фаз на рис. 4 соответствует поворот вектора против часовой стрелки. Можно было бы, конечно, отсчитывать угол φ в противоположном направлении.

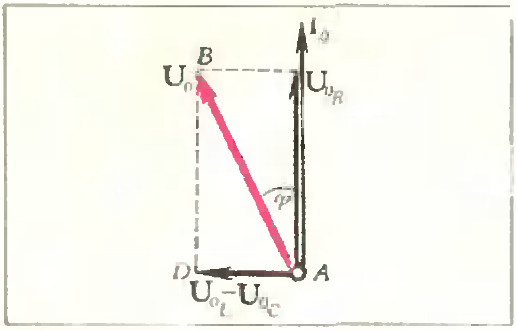


Рис. 5.

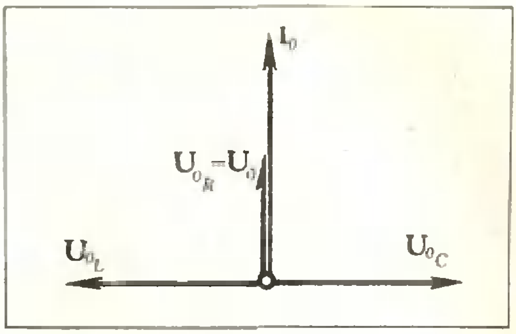


Рис. 6.

отстает по фазе от вектора $\mathbf{I}_0$ на $\pi/2$ (см. рис. 4). Его модуль $U_{0_C}=I_0/C\omega$.

Для того чтобы найти суммарное напряжение (см. уравнение (4)), нужно сложить три вектора: $\mathbf{U}_{0_R}$, $\mathbf{U}_{0_L}$ и $\mathbf{U}_{0_C}$. Вначале удобно сложить векторы $\mathbf{U}_{0_L}$ и $\mathbf{U}_{0_C}$ (рис. 5). Модуль этой суммы $|\mathbf{U}_{0_L}+\mathbf{U}_{0_C}|=I_0\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)$, если $L\omega>\frac{1}{C\omega}$. Именно такой случай изображен на рис. 5. После этого, сложив вектор $\mathbf{U}_{0_L}+\mathbf{U}_{0_C}$ с вектором $\mathbf{U}_{0_R}$, получим вектор $\mathbf{U}_0$, изображающий колебания напряжения на концах цепи.

Треугольник ABD прямоугольный. По теореме Пифагора

$$U_0^2=U_{0_R}^2+(U_{0_L}-U_{0_C})^2=$$
$$=I_0^2R^2+I_0^2\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2.$$

Отсюда амплитуда силы тока

$$I_0=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}=\frac{U_0}{Z},\quad (17)$$

где $Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$ — полное сопротивление цепи. Сдвиг фаз между силой тока и напряжением равен углу φ между векторами $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{I}_0$. Из треугольника ABD

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}.\quad (18)$$

На рисунке 5 изображен случай, когда сила тока отстает по фазе от напряжения (при $L\omega<\frac{1}{C\omega}$ сила тока опережала бы напряжение по фазе).

Формулы (17) и (18) полностью описывают вынужденные колебания в последовательном колебательном контуре. Рассмотрим для примера один частный случай.

Сила тока в колебательном контуре достигает максимального значения $I_0=\frac{U_0}{R}$ при $L\omega=\frac{1}{C\omega}$, т. е. когда частота приложенного к контуру напряжения равна собственной частоте колебаний контура $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Наступает, как говорят, резонанс. При резонансе напряжения u_L и u_C одинаковы по амплитуде, но колеблются в противофазах, поэтому в любой момент времени они компенсируют друг друга. Векторная диаграмма для случая резонанса изображена на рисунке 6. Сдвиг фаз между током и приложенным напряжением становится равным нулю. Напряжение на активном сопротивлении оказывается равным напряжению на концах цепи: $u_R=iR=U_0\cos\omega t$. Резонанс в последовательном колебательном контуре называют обычно резонансом напряжений. Дело в том, что в реальном контуре индуктивное и емкостное сопротивления всегда гораздо больше активного сопротивления, и при резонансе амплитуды напряжений U_{0_L} и U_{0_C} оказываются больше амплитуды приложенного напряжения U_0.

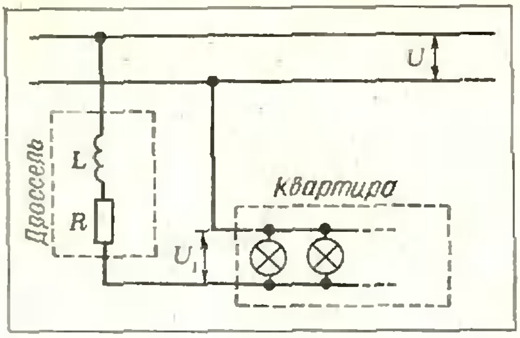


Рис. 7.

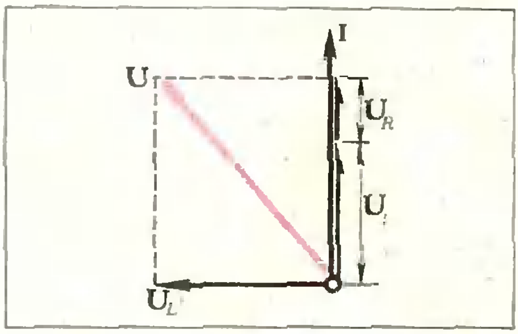


Рис. 8.

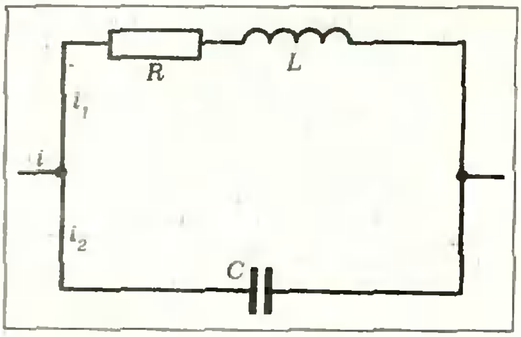


Рис. 9.

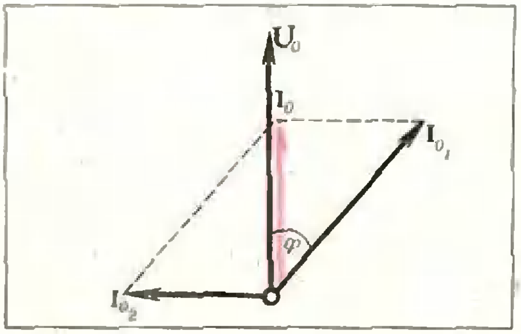


Рис. 10.

Энергия, потребляемая колебательным контуром

С помощью векторной диаграммы можно легко показать, что потребляемая контуром энергия выделяется только на активном сопротивлении R.

Мощность в цепи переменного тока определяется формулой

$$P = \frac{I_0 U_0}{2} \cos\varphi. \qquad (19)$$

Из треугольника ABD на рисунке 5

$$U_{0_R} = I_0 R = U_0 \cos\varphi. \qquad (20)$$

Подставляя в выражение (19) вместо $U_0 \cos\varphi$ его значение из равенства (20), получим

$$P = \frac{I_0^2 R}{2} = I^2 R, \qquad (21)$$

где I — действующее значение силы тока.

Заметим, что при резонансе, когда амплитуда силы тока достигает максимума, колебательный контур потребляет извне наибольшее количество энергии. Создаются оптимальные условия для передачи энергии от источника к колебательной системе.

Примеры расчета цепей переменного тока с помощью векторных диаграмм

Рассмотрим две конкретные задачи.

З а д а ч а 1. *К магистрали переменного тока с напряжением $U = 120$ в (U — действующее значение напряжения) через дроссель с индуктивностью $L = 0{,}05$ гн и активным сопротивлением $R = 1$ ом подключена осветительная сеть квартиры (рис. 7). Каково напряжение U_1 на входе в квартиру, если потребляемый ток $I = 2a$? Напряжение меняется с частотой $\nu = 50$ гц. Индуктивностью и емкостью электрической цепи квартиры можно пренебречь.*

Дроссель и осветительная сеть квартиры подключены к магистрали последовательно, поэтому ток одинаков на всех участках цепи. Напряжение U_1 и напряжение U_R на активном сопротивлении дросселя совпадают по фазе с силой тока I. Напряжение U_L на индуктивном сопротивлении дросселя опережает ток на $\pi/2$. Следовательно, векторная диаграмма цепи имеет вид, изображенный на рисунке 8. По теореме Пифагора

$$U^2=U_L^2+(U_R+U_1)^2=$$
$$=I^2\omega^2L^2+(IR+U_1)^2.$$

Отсюда

$$U_1=-IR\pm\sqrt{U^2-I^2L^2\omega^2},$$

где $\omega=2\pi\nu$. Так как действующее значение напряжения всегда положительно, т. е. $U_1>0$, то

$$U_1=-IR+\sqrt{U^2-I^2L^24\pi^2\nu^2}\approx114\ \text{в}.$$

Задача 2. *При какой частоте ω отсутствует сдвиг фаз между силой тока i и напряжением u в цепи, изображенной на рисунке 9?*

В этой задаче рассматривается электрическая цепь, состоящая из двух ветвей, соединенных параллельно. Одна ветвь содержит активное и индуктивное сопротивления, другая — емкостное сопротивление. Данную цепь называют параллельным колебательным контуром.

Построение векторной диаграммы начнем с вектора, соответствующего приложенному напряжению, поскольку именно напряжение одинаково для обеих ветвей цепи. Направим вектор $\mathbf{U}_0$ вертикально вверх (рис. 10). Ток i является суммой токов i_1 и i_2 (см. рис. 9). Колебания тока i_1 отстают по фазе от колебаний напряжения, так как верхний участок цепи содержит индуктивное сопротивление. Вектор $\mathbf{I}_{01}$ повернут относительно вектора $\mathbf{U}_0$ на угол φ в отрицательную сторону. Согласно формулам (17) и (18)

$$I_{01}=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\quad\text{и}\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega}{R}.$$

Ток i_2, текущий через конденсатор, опережает по фазе напряжение на $\pi/2$. Соответствующий вектор $\mathbf{I}_{02}$ повернут на угол $\pi/2$ в положительную сторону. Его модуль $I_{02}=U_0C\omega$. По условию задачи ток i совпадает по фазе с приложенным напряжением, следовательно, вектор $\mathbf{I}_0$ направлен так же, как вектор $\mathbf{U}_0$. Окончательная векторная диаграмма представлена на рисунке 10. Из этой диаграммы следует, что амплитуды токов в ветвях связаны соотношением

$$I_{02}=I_{01}\sin\varphi. \qquad (22)$$

Подставляя значения I_{01}, I_{02} и

$$\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$$

в равенство (22), получим

$$U_0C\omega=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\,\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}.$$

Отсюда

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}.$$

При такой частоте ток i и напряжение u колеблются в фазе.

Если активное сопротивление R мало́, так что

$$\frac{R^2}{L^2}\ll\frac{1}{LC}$$

(в реальном колебательном контуре это практически всегда так), то

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

— то есть частота переменного напряжения совпадает с частотой собственных колебаний контура.

Московский физико-технический институт

Подробно о Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте было рассказано в «Кванте» № 10 за 1973 год. Ниже приводятся некоторые билеты вступительных письменных экзаменов в МФТИ по математике и физике в 1975 году.

Математика

Билет 1

1. Сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии на 2 больше суммы первых трех членов этой прогрессии. Сумма первых шести членов равна 3. Найти S.

2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 32\cdot\cos^3 2x.$$

3. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Катет AB образует с ребром двугранного угла острый угол α. Определить угол между этим ребром и катетом AC.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log^2_{\frac{2}{3}} x + \log^2_{\frac{2}{3}} y - \log^2_{\frac{2}{3}} (x+y) = 1, \\ \log_{\frac{3}{2}} x\cdot\log_{\frac{3}{2}} y + \log_{\frac{3}{2}} (x+y) = 0. \end{cases}$$

5. Площадь трапеции $ABCD$ равна S, отношение оснований $AD : BC = 3$. На прямой, пересекающей продолжение основания AD за точку D в некоторой точке M, расположен отрезок EF так, что $AE \parallel DF$, $BE \parallel CF$ и $AE : DF = CF : BE = 2$.

Определить площадь треугольника EFD (найти все решения).

Билет 2

1. Решить уравнение

$$\cos 3x\cdot\operatorname{tg} 5x = \sin 7x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\log_3 (3^x - 1)}{x-1} \geqslant 1.$$

3. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, угол между ними равен α. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ABM, BCM, CDM, DAM. Определить отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $O_1O_2O_3O_4$.

4. Два пешехода вышли одновременно: первый — из A в B, второй — из B в A. Когда расстояние между ними сократилось в шесть раз, из B в A выехал велосипедист. Первый пешеход встретился с ним в тот момент, когда второй прошел $\frac{4}{9}$ расстояния между B и A. Велосипедист в пункт A и первый пешеход в пункт B прибыли одновременно. Определить отношение скоростей пешеходов к скорости велосипедиста, считая эти скорости постоянными.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между боковым ребром SA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром SA и плоскостью грани SBC. Определить этот угол.

Физика

Билет 1

1. На какое максимальное расстояние от Солнца удаляется комета Галилея? Период обращения ее вокруг Солнца равен 76 годам; минимальное расстояние, на котором она проходит от Солнца, равно $1{,}8\cdot10^8$ *км*. Радиус орбиты Земли равен $1{,}5\cdot10^8$ *км*.

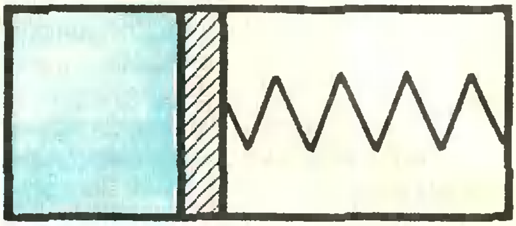


Рис. 1.

2. В расположенном горизонтально теплоизолированном цилиндре может перемещаться поршень, слева от которого находится идеальный газ, а справа — вакуум (рис. 1). Между поршнем и дном цилиндра расположена пружина. В начальный момент поршень закреплен, а пружина находится в недеформированном состоянии. Затем поршень освобождают. После установления равновесия объем, занимаемый газом, оказался в два раза больше начального, а температура — равной (10/11) от начальной. Определить молярную теплоемкость газа при постоянном объеме C_V. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ *дж/(моль·град)*.

3. В одно из плеч моста Уитстона (рис. 2) включено нелинейное сопротивление, для

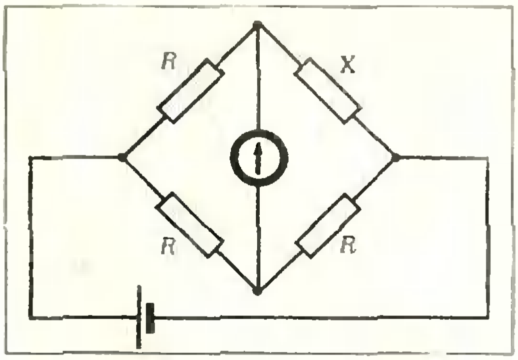


Рис. 2.

которого закон Ома не справедлив и зависимость тока I (в амперах) от приложенного напряжения U (в вольтах) имеет вид $I = 0{,}01\ U^3$. В остальные плечи моста включены одинаковые сопротивления $R = 4$ *ом*. При каком токе внешней батареи мост окажется сбалансированным?

4. С помощью положительной линзы с фокусным расстоянием F получено объемное действительное изображение прозрачного кубика со стороной l. Изображение ближней к линзе грани кубика находится на расстоянии $2F$ от линзы. Найти объем полученного изображения.

Билет 2

1. На высоте $h = 2$ *м* над широким сосудом открывают на $t_0 = 2$ *сек* кран, из которого вниз бьет струя воды с расходом $q = 200$ *г/сек*. Площадь отверстия крана $S = 1$ *см*^{2}. Найти изменение силы давления сосуда на подставку и нарисовать график этой силы как функцию времени. Вода из сосуда не вытекает.

2. Газовый термометр представляет собой измерительный баллон объемом $V_1 = 100$ *см*^{3}, соединенный тонкой трубкой с манометром, объем рабочего пространства которого $V_2 = 10$ *см*^{3}. Термометр заполнен изотопом гелия He^3. При температуре $t_0 = 27$ °С манометр показывает давление $p_0 = 300$ *мм рт. ст.* Измерительный объем погружают в жидкий гелий. Найти температуру жидкого гелия, если манометр показывает давление $p = 3{,}3$ *мм рт. ст.* Манометр остается при комнатной температуре.

3. Сферический конденсатор имеет емкость $C = 10^{-10}$ *ф*. Конденсатор заполняется слабопроводящей жидкостью с удельным сопротивлением $\rho = 10^4$ *ом·м*. Найти электрическое сопротивление между обкладками конденсатора. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ (единиц СИ).

4. Плоско-выпуклая толстая линза (рис. 3) с радиусом кривизны выпуклой части $R = 2{,}5$ *см* изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$. Где находится фокус такой линзы? Углы преломления считать малыми, так что их тангенсы можно приближенно заменить синусами.

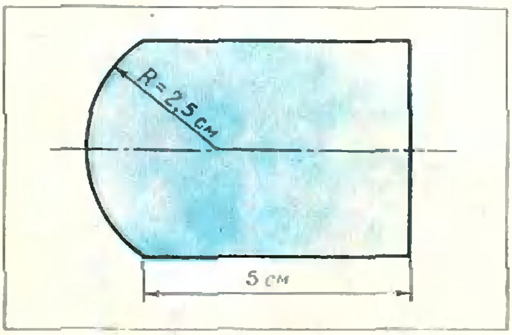


Рис. 3.

Билет 3

1. Третья ступень ракеты состоит из ракеты-носителя массой $M = 50$ *кг* и головного защитного конуса массой $m = 10$ *кг*. Конус сбрасывается вперед сжатой пружиной. При испытаниях на Земле с закрепленной ракетой пружина сообщала конусу скорость $v_0 = 5{,}1$ *м/сек*. Какова будет относительная скорость конуса и ракеты, если их разделение произойдет на орбите?

2. Воздушный резиновый шарик надувают в комнате ртом при температуре 22° С. На сколько изменится объем шарика, если вынести его на улицу, где температура 1° С? Считать, что водяной пар в воздушном шарике находится в насыщенном состоянии. Давление насыщенного пара при температуре 22°С — 20 *мм рт. ст.*, при температуре 1°С — 5 *мм рт. ст.* Внешнее давление 760 *мм рт. ст.* Давлением резиновых стенок шарика пренебречь.

3. Пробой в воздухе наступает в электрическом поле с напряженностью $E_{max} = 3 \cdot 10^4$ *в/см*. Имеется сферический конденсатор с воздушным зазором, наружная оболочка которого имеет радиус $R = 4$ *см*, а радиус внутренней оболочки подбирается таким, чтобы конденсатор не пробивался при возможно большем значении разности потенциалов. Определить эту максимальную разность потенциалов.

4. Две тонкие плоско-выпуклые стеклянные линзы, будучи сложены плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием F_1. Найти фокусное расстояние F_2 линзы, которая получится, если сложить эти линзы выпуклыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатель преломления стекла $n = 1{,}66$, воды — $n_в = 1{,}33$.

С. Козел, В. Чехлов, А. Шеломин

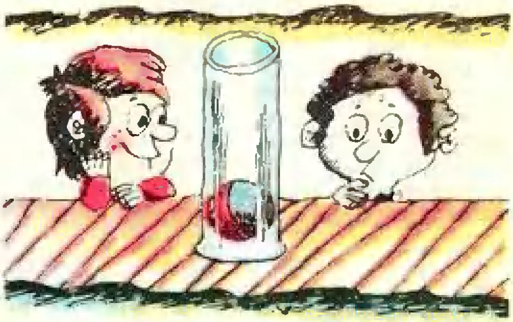
«Квант» для младших школьников

Задачи

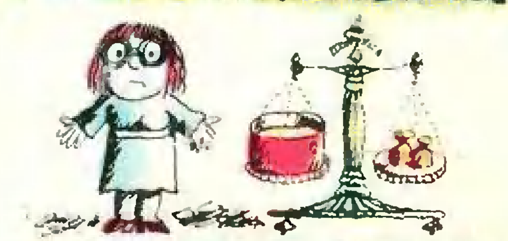
1. И сказал Кащей Ивану-Царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю три цифры — a, b, c. Назовешь ты мне три числа — x, y, z. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax+by+cz$. Тогда отгадай, какие a, b, c я задумал. Не отгадаешь — голову с плеч долой».

Запечалился Иван-Царевич, пошел думу думать. Надо бы ему помочь.

2. В высокий цилиндрический сосуд диаметром 5 *см* упал мяч диаметром 4 *см*. Сможете ли вы достать мяч, не переворачивая сосуда?



3. Лаборантка утром взвесила на особо точных весах открытый сосуд с только что вскипевшим маслом. К концу дня, когда масло остыло, она взвесила сосуд еще раз. Результат взвешивания оказался иным. Почему?



4. Люся переехала в новый восьмиэтажный дом. В нем два подъезда, на каждом этаже четыре квартиры. Когда во дворе ребята спросили Люсю, в какой квартире она живет, она сказала: «А вы отгадайте. Но на все вопросы я буду отвечать «да» или «нет».

Один мальчишка сказал: «Я буду спрашивать, верно ли, что ты живешь в 1-й квартире, во 2-й, ..., в 63-й? Мне понадобится самое большее шестьдесят три вопроса».

«А мне хватит четырнадцати! — закричал самый маленький. — Этаж я узнаю за семь вопросов, а квартиру — еще за семь».

А за сколько вопросов вы смогли бы узнать номер Люсиной квартиры?

А. Орлов

«Все», «некоторые» и отрицание

Был у меня недавно интересный разговор с шестиклассником Аликом, центральным нападающим футбольной команды нашего двора.

— Что, Алик, бежишь на тренировку? Зимой, небось, сменишь свой футбол на хоккей?

— Ни за что на свете!— воскликнул Алик обиженно.— Зимой надо заниматься, а не бегать за шайбой. Все хоккеисты плохо учатся,— футболисты учатся гораздо лучше!

— Почему ты так решил?

— А что? Все так считают в нашей команде, не я один.

— А не кажется ли тебе, что ты рассуждаешь сейчас, как печально известные обезьяны из книги Киплинга «Маугли»? Помнишь, они кричали на весь лес: «Мы велики! Мы свободны! Мы достойны восхищения! Мы все так говорим, значит, это правда!...»

— Это кто же обезьяна?!— возмутился Алик.

— Я не хотел обидеть тебя, Алик, но ссылкой на мнение многих нельзя ничего доказать. Земля круглая, а в древности почти все думали, что она плоская. Индейцы племени сиу, как пишет их вождь Мато Нажин, считали даже, что Земля четырехугольная, а было это уже в XIX веке... Так почему же все хоккеисты плохо учатся?

— Ну-у, вот Сережа Кукушкин. Он все время играет в хоккей и все время получает двойки.

— Ты рассуждаешь, как один француз, который говорил: «Все англичане низенькие, толстенькие и чернявые»,— только потому, что так выглядел единственный англичанин, с которым он встречался. И ты, и этот француз нарушаете *законы логики*.

Алик задумался, а я решил помочь ему. Для начала рассказал такую историю.

— В одном городе я видел на доме табличку: «*В нашем доме нет двоечников*». На соседнем доме такой таблички не было. Как по-твоему, Алик, значит ли это, что в соседнем доме все были двоечники?

— Н-нет,— пробормотал Алик неуверенно. Не обязательно. Это значит только, что там есть двоечники... Хотя бы один двоечник... А может быть, и все там учатся на двойки. Нет, не знаю, я ведь не был там!

— А что же означает такая фраза: «*Неверно, что среди ребят есть двоечники*»?

— Это как в первом доме — все учатся без двоек.

— Значит, одно из двух,— сказал я удовлетворенно.— Либо все учатся без двоек, либо в доме есть хотя бы один двоечник. А что можно сказать о любителях шайбы?

И тут выяснилось, что Алик может, подумавши, рассуждать правильно.

— Верно одно из двух: либо все хоккеисты плохо учатся, либо не все,— есть хоккеисты, которые учатся хорошо.

— Но даже в твоем классе, Алик, я знаю троих отличников, которые любят гонять шайбу. Значит, верно второе: бывают хоккеисты, которые хорошо учатся.

— Ну, конечно!

— А что же тогда означает твой пример с Сережей Кукушкиным?

Алик задумывается.

— Что не все хоккеисты хорошо учатся...

Итак, попробовав рассуждать логично, Алик сам пришел к правильному выводу.

С двоечниками и хоккеистами мы разобрались сравнительно быстро. Попробуем понять, как следует рассуждать в более сложных случаях. Первый пример — с разноцветными шарами. Представим себе, что в урне (небольшом ящике) могут лежать, скажем, белые и красные шары. Все шары одинакового размера и неразличимы на ощупь. Кто-то опускает руку в урну и вынимает шар. Шар оказывается, к примеру, красным. Что можно сказать о цвете остальных шаров, лежащих в урне?

Некоторые скажут: «Все шары красные». На самом деле это не верно: можно лишь утверждать, что н е к о т о р ы е (не обязательно все) шары красные. Могут быть и белые шары. Может быть и так, что вынутый шар — единственный красный среди белых.

Был вынут красный шар. Значит, неверно утверждение: «Все шары белые». А что верно? — «Некоторые (по крайней мере один) шары красные». Давайте потренируемся. Пусть каждое из следующих утверждений неверно.

1. *Все шары в урне красные.*
2. *Некоторые шары в урне красные.*
3. *Некоторые шары в урне белые.*
4. *Все равнобедренные треугольники являются прямоугольными.*
5. *Все ученики класса были на собрании.*
6. *Некоторые девочки были на собрании.*

Сформулируйте верные утверждения.

А теперь общая схема решения всех подобных задач — наше «волшебное средство». Пусть у нас есть множество M каких-то объектов (это может быть несколько шаров, или несколько книг, или все ученики какого-то класса). Каждый из элементов этого множества может обладать, а может и не обладать некоторым свойством A. Например, шар может быть красным, а может и не быть; хоккеист — быть или не быть двоечником.

Закон такой: *верно может быть либо утверждение, либо его отрицание.* Одно и только одно из двух! (В логике этот закон называется *законом исключенного третьего.*) То есть, *каждое утверждение, которое мы ис-*

пользуем, либо верно, либо неверно.

Либо верно утверждение B, либо его отрицание (то есть утверждение: «Утверждение B не верно»). Либо все хоккеисты плохо учатся (*обладают свойством* A). Если же это неверно, то хотя бы один хоккеист учится хорошо (*не обладает свойством* A).

Итак, вот наша схема:

Утверждение

1. Все предметы из M обладают свойством A.

2. Некоторые предметы из M обладают свойством A.

Его отрицание

1. Хотя бы один предмет из M не обладает свойством A.

2. Все предметы из M не обладают свойством A.

Обратите внимание на то, что утверждения *«некоторые предметы обладают свойством A»* и *«хотя бы один предмет* (а может быть, и все) *обладают свойством A»* означают в нашей схеме одно и то же.

А теперь — задачи.

Постройте отрицания следующих утверждений:

7. Все углы данного шестиугольника тупые.

8. Для любого x из множества A выполнено неравенство: $x^2>4$.

9. Некоторые люди — дети.

10. По крайней мере для одного x из множества A будет $x^2-2x+1=0$.

11. Все мужчины выше 2-х метров.

12. Все простые числа — нечетные.

13. Для любого простого p число 2^p-1 тоже простое.

Вернемся к урне, в которой лежат шары, неразличимые на ощупь. Шары могут быть белого, красного, синего, черного цветов.

14. Известно, что не все шары в урне белые. Верно ли, что там есть красный шар?

15. Известно, что не все шары одного цвета. Верно ли, что в урне есть хотя бы один не белый шар?

16. В урне 10 белых, 8 красных, 11 черных шаров. Сколько из них надо вынуть, чтобы наверняка попался белый шар? Чтобы попались шары всех трех цветов?

И еще две задачи — чуть посложнее.

17. В классе 5 отличников, 20 «хорошистов» и 10 троечников. Отличник может получить за ответ только 5, «хорошист» — 4 или 5, троечник — 3, 4 или 5. В класс пришел новый учитель, он не знает никого из учеников. Сколько человек ему достаточно вызвать к доске, чтобы наверняка была поставлена хотя бы одна пятерка?

18. Найдите все натуральные числа n, для которых справедливы неравенства: $486<n\leq 501$ — и, кроме того, верно одно и только одно из следующих условий:

а) число n — четное;
б) n делится на 3;
в) n делится на 2 или на 3;
г) n не делится на 3, но делится на 4;
д) n не делится ни на 3, ни на 4;
е) n делится на 3, но не делится на 6;
ж) n делится на 8 или на 9;
з) n делится и на 3, и на 4;
и) n делится на 11.

Иначе говоря, для каждого числа n из искомого множества должно быть верно только одно из этих девяти условий.

К статье «Простой ответ в «сложной» задаче»

1. Точка E такова, что $|BE| = \sqrt{a^2-b^2}$. Указание. Рассмотрите равнобедренный треугольник DCE и затем прямоугольный треугольник CBE.

2. Указание. Соедините точку пересечения отрезков EK и FL с вершинами A, B, C, D; рассмотрите площади образовавшихся восьми треугольников.

3. $h = a\cdot\sqrt{\dfrac{b}{a+b}}$. Указание. Сделайте параллельный перенос диагоналей AC и BD так, чтобы точка C диагонали AC совпала с точкой B, а точка B диагонали BD совпала с точкой C. В образовавшихся прямоугольных треугольниках EBM и MCF выразите сумму длин проекций катетов BM и CM на гипотенузы EM и MF через искомую высоту h и стороны a и b.

4. $|AC| = \sqrt{ab}$. Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников ABC и ADC, из которого $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{|CD|}{|AC|}$.

5. $|BC| = a\sqrt{1+\dfrac{r}{R}}$. Указание. Продлите хорду BA большей окружности O до пересечения с меньшей окружностью O_1 в точке D, рассмотрите подобные треугольники AOB и AO_1D и найдите длину хорды AD. Затем в окружности O_1 используйте соотношение между касательной BC и секущей BD.

6. $$|BM| = R\cdot\operatorname{cosec}\left(\arcsin\frac{24}{25}\right)\times$$
$$\times\left[1-\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right)\right] = \frac{5}{24}R.$$

Указание. Постройте прямоугольный треугольник EFK, где E — точка касания данной окружности со стороной AB, EF лежит на радиусе EO этой окружности и является высотой параллелограмма $ABML$; EK — сторона параллелограмма $EBMK$. Покажите, что в этом треугольнике острый угол $\widehat{EKF} = \arcsin\dfrac{24}{25}$, катет EF равен $R - R\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}\right) = \dfrac{R}{5}$, предварительно доказав, что $\widehat{MOE} = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}$.

7. $|DM| = \sqrt{|AM|^2+|BM|^2-|CM|^2} = 7$. Указание. Постройте окружность, концентрическую данной, проходящую через точку M. Взяв точку N, диаметрально противоположную точке M на этой окружности, рассмотрите параллелограммы $AMBN$ и $CMDN$.

8. $\widehat{AMK} = \operatorname{arcctg}(\cos\alpha)$. Указание. Проведите хорду CM, опустите перпендикуляры KD на AM и KE на CM и рассмотрите прямоугольные треугольники KDM и KEC с двумя конгруэнтными сторонами: $|MD| = |KE|$ и $|KD| = |KC|$.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 1)

1. Нет. Указание. Изменения в словах не меняют разности между числом букв *О* и числом букв *Д*.

2. На большой глубине трубка с запаянными концами будет сплющена силами давления воды. Открытая трубка деформироваться не будет.

3. 1431 : 27 = 53.

4. На полюсе в течение суток высота Солнца над горизонтом почти не меняется. Поэтому тень от какого-нибудь предмета в течение суток «ходит по кругу», оставаясь все время одной длины.

5. Второй игрок должен называть число, дополняющее до 10 число, названное первым игроком ($1+9=10$, $2+8=10$, ..., $9+1=10$).

Номер оформили:
Е. Верентинова, С. Верховский, Г. Козаковцев, В. Карцев, Г. Красиков, Э. Назаров

Корректор *М. Л. Медведская*

113035, Москва Ж-35, Б. Ордынка, 21/16
«Квант», тел. 231-83-62. Сдано в набор 22/XI-75 г.
Подписано в печать 30/XII-75 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,65. Т-21836.
Цена 30 коп. Заказ 2564. Тираж 325 340
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Ракушки и... нейтрино

Серия кубинских почтовых марок с изображением моллюсков не только красива. Она дает повод для забавного текста. Посмотрите на семь ракушек, изображенных на этих марках. Сколько из них «правых», а сколько «левых»? «Правые» и «левые» ракушки — это ракушки, закрученные как правый или как левый винт, соответственно. Не забывайте, что правый винт остается правым, даже если его перевернуть «вверх ногами». Сколько же здесь «правых» и сколько «левых» ракушек?

Асимметрия правого и левого в природе — очень интересное и очень странное явление. Ракушки закручены большей частью в одну сторону, хотя есть виды ракушек, у которых оба типа спирали встречаются поровну. Но и в этом случае правые особи живут в одних районах, а левые — в других. В природе асимметрия левого и правого резко выражена. Это видно и в мире животных, и в мире растений, и даже у микробов. Знаменитая дезоксирибонуклеиновая кислота (ДНК), передающая наследственные признаки организма, имеет симметрию правой спирали.

Среди элементарных частиц тоже имеются «левые» и «правые». «Право» и «лево» определяется тем, как частицы «крутятся в полете». Оба сорта нейтрино (мюонное и электронное) оказались «левшами», а оба сорта антинейтрино — «правшами». Нейтрино как будто «ввинчиваются» в пространство как левый винт, а антинейтрино — как правый. Кванты света — фотоны тоже бывают «правые» и «левые».

Так, несколько неожиданно, ракушки обретают нечто общее с нейтрино и квантами.

Я. С., В. Л.

Цена 30 коп.

Индекс 70465

«Две тысячи лет тому назад геометрия застыла в своих величавых, прекрасных формах, как зачарованная красавица в народной сказке. Но сто лет тому назад пришли три витязя: один из немецкой (Гаусс), другой из венгерской (Бойяи), третий — из русской Земли (Лобачевский). Они окропили ее мертвой и живой водой. Мертвая вода смыла самовластие евклидовой геометрии, заставила ее отказаться от того абсолютного господства, с которым она владычествовала в пространственных отношениях; живая вода дала ей, самой евклидовой геометрии, вечное бытие». *(В. Каган)*